

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

П. А. Гавриш, Л. В. Васильева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

для студентов специальности
7.092301 «Технология и оборудование сварки»

Утверждено
на заседании
ученого совета
Протокол № 7 от 25.01.2007

Краматорск 2007

УДК 621.791:519.876.5

ББК 30.4

Г 12

Рецензенти:

С. В. Гулаков, д-р техн. наук, проф., Приазовский государственный технический университет;

А. С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф., Донецкий национальный университет.

Навчально-методичний посібник містить короткі теоретичні відомості про математичне моделювання, схеми формалізації імітаційних моделей. Приведені основні поняття і проблеми оптимізації моделей. Методи оптимізації. Методологія проведення пасивного і активного наукового експерименту. Представлені практичні приклади математичного моделювання в галузі зварювального виробництва. Розроблені завдання студентам для самостійної роботи.

Гавриш П.А., Васильева Л.В.

Г 12 Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие для студентов специальности 7.092301 «Технология и оборудование сварки». – Краматорск: ДГМА, 2007. – 100 с.

ISBN 978-966-379-131-9.

Учебно-методическое пособие содержит короткие теоретические сведения о математическом моделировании, схемах формализации имитационных моделей. Приведены основные понятия и проблемы оптимизации моделей. Методы оптимизации. Методология проведения пассивного и активного научного эксперимента. Представлены практические примеры математического моделирования в отрасли сварочного производства. Разработаны задания студентам для самостоятельной работы.

УДК 621.791:519.876.5

ББК 30.4

ISBN 978-966-379-131-9

© Гавриш П. А.,

Васильева Л. В., 2007

© ДГМА, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ	5
2 ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	10
3 МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	13
4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ СВАРОЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА	20
4.1 Формирование модели на основе системного анализа	21
4.2 Математическая формулировка цели проектирования	24
4.3 Выбор метода решения задачи синтеза и алгоритм решения	25
5 ЭТАПЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ 2-ГО ПОРЯДКА	27
5.1 Составление таблицы кодирования факторов	27
5.2 Заполнение плана-матрицы проведения эксперимента (пример)	31
5.3 Рандомизация опытов и реализация плана эксперимента	31
5.4 Проверка воспроизводимости опытов	34
5.5 Расчет коэффициентов регрессии	36
5.6 Оценка значимости коэффициентов регрессии	36
5.7 Проверка адекватности полученной модели	37
6 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1	39
7 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2	51
8 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3	65
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	76
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ	77
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Краткие сведения о системе Statistica V 6.0	78
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Варианты заданий к практической работе №1	83
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Варианты заданий к практической работе №2	88
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Варианты заданий к практической работе №3	94

ВВЕДЕНИЕ

Процесс исследования осуществляется человеком и заключается в наблюдении свойств объектов и выполнении целенаправленных действий для выявления и оценки, важных с точки зрения исследователя закономерных отношений между показателями данных свойств.

Моделирование – это один из наиболее эффективных методов исследования, который заключается в построении и изучении специальных объектов (моделей), свойства которых подобны с точки зрения исследователя, свойствам исследуемых объектов (оригиналов). В широком смысле моделирование представляет собой научную дисциплину, где изучаются методы построения и использования моделей для познания реального мира.

Философскую концепцию моделирования составляют теория отражения и теория познания, а формально-методическую основу – теория подобия, теория эксперимента, математическая статистика, математическая логика и научные дисциплины, изучающие те предметные области, которые подлежат исследованию методами моделирования.

Изучение методологических основ моделирования целесообразно начать с рассмотрения философских понятий теории отражения реальной действительности в сознании некоторого субъекта. Это должно обеспечить нам однозначное понимание положений излагаемых далее прикладных теорий. Приведем определения наиболее существенных для моделирования философских понятий. **Предметная область** – это мысленно ограниченная область реальной действительности или область идеальных представлений, подлежащая описанию (моделированию) и исследованию.

В нашем представлении **объект** – это все, что мы различаем как нечто целое, реально существующее или возникающее в нашем сознании и обладающее свойствами, значения которых позволяют нам однозначно распознавать это нечто. Объект, на котором сосредоточивается внимание субъекта с целью исследования, называется **объектом исследования**.

Объекты воспринимаются и различаются субъектами лишь постольку, поскольку они обладают характерными свойствами или способностями. "Свойство" и "способность" также являются весьма важными понятиями в рассуждениях человека.

Свойством называется характерная особенность объекта, которая может быть замечена и оценена субъектом, например: вес, цвет, длина, плотность и т. п.. Для оценки исследуемого свойства объекта субъект устанавливает определенную меру, называемую **показателем свойства**.

1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

С середины XX-го века в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и электронно-вычислительную технику. Возникли такие новые дисциплины, как «математическая экономика», «математическая лингвистика», «математическая биология» и т. д., изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования – исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование – это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...» Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако все это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Однако в модели отображаются только те факторы и параметры оригинального объекта, которые имеют существенное значение для решения исследуемой проблемы. Кроме того, измерения существенных факторов и параметров практически всегда содержат ошибки, вызываемые неточностью измерительных приборов и незнанием некоторых факторов. В силу этого математическая модель является только приближенным описанием свойств изучаемого объекта. А математическую модель можно определить еще и как **абстракцию** изучаемой реальной сущности.

Единственным способом проверки степени соответствия модели и моделируемого объекта является научный эксперимент. Под **экспериментом** понимают целенаправленно организованный опыт, состоящий из воспроизведения и наблюдения исследуемого явления с необходимой точностью.

Математическое моделирование также представляет собой эксперимент, цель которого состоит в том, чтобы опытным путем, или путем логического вывода, найти неизвестные параметры $\theta_1, \dots, \theta_m$ математической модели изучаемого процесса или объекта и построить соотношение $Y^* = F^*(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r, \theta_1, \dots, \theta_m)$ в явном виде так, чтобы в области варьирования факторов $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r$ функция Y^* наилучшим образом приближалась бы к функции Y .

Достижение этой цели основано на использовании **принципа максимального правдоподобия** математической модели (функции F^*) экспериментально полученным данным об исследуемом объекте.

Наука – это непрерывно развивающаяся система знаний объективных законов природы, общества и мышления, получаемых и превращаемых в непосредственную производительную силу общества в результате специальной деятельности людей.

Науку можно рассматривать в различных измерениях:

1) как специфическую форму общественного сознания, основу которой составляет система знаний;

2) как процесс познания закономерностей объективного мира;

3) как определенный вид общественного разделения труда;

4) как один из важных факторов общественного развития и как процесс производства знаний и их использование.

Всякая научная дисциплина, как правило, основывается на исходных понятиях и определениях, позволяющих однозначно понимать язык, применяемый для изложения этой дисциплины. Моделирование, как научная дисциплина, также содержит ряд специальных понятий, которые составляют начало методологических основ этой науки (концептуальная часть науки). Зачастую, приступая к решению научно-технических задач, инженер не имеет исчерпывающих сведений о механизме исследуемого процесса. Он может только назвать параметры, определяющие условия протекания процесса, и требования к его результатам.

В этих условиях целесообразно использование кибернетического подхода, в основе которого лежит предложенная Н. Винером идея «черного ящика». «Черный ящик» – это объект исследования (рис. 1). Стрелками, входящими в объект, показаны входные параметры, которые могут быть управляемыми (x) и неуправляемыми (z). Работа объекта может характеризоваться несколькими выходными параметрами, которые на схеме обозначены стрелками, выходящими из прямоугольника.

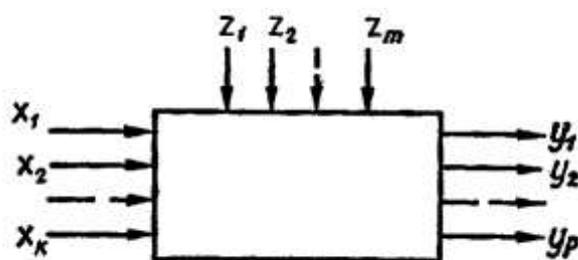


Рисунок 1 – «Черный ящик» Виннера [1]

Необходимо научиться управлять объектом, информация об элементарных операциях внутри которого чрезвычайно мала, что, по сути, аналогично решению поставленных задач. Обычно входные величины называют – **факторами**, а зависимость выходной величины от входной – **откликом**.

Объект моделирования (предмет) – это ограниченная область реальной действительности или область идеальных представлений, подлежащая описанию (моделированию) и исследованию. Например, при исследовании сварочных свойств электродов для ручной дуговой сварки объект исследования – химические свойства стержня электрода, состав и количественные соотношения компонентов обмазки. Если объектом исследования является система, то это может быть, например, система связей и взаимодействий сварочной ванны на свойства металла сварного шва и околошовной зоны в зависимости от режима сварки (ток, напряжение, и т. п.).

1 Объект исследования должен удовлетворять требованию воспроизводимости. При многократном повторении эксперимента его результат имеет разброс значений, который характеризует воспроизводимость результата. Объект исследования удовлетворяет требованию воспроизводимости, если его многократное повторение дает результаты с разбросом значений, не превышающим некоторой заданной величины.

2 Объект должен быть управляемым, но практически нет абсолютно управляемых объектов. На реальный объект действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Последние влияют на воспроизводимость результатов эксперимента и могут служить причиной ее нарушения. Если требование воспроизводимости удовлетворяется, выявляют возможность проведения активного эксперимента, предусматривающего активное вмешательство в исследуемый процесс и выбор для каждого эксперимента управляемых факторов на тех уровнях, которые представляют интерес для исследования.

Объект, на котором возможен активный эксперимент, называют управляемым.

Параметр оптимизации. При планировании эксперимента важно правильно выбрать параметр оптимизации. Движение к оптимуму возможно, если выбран один параметр оптимизации, а другие выступают в качестве ограничений. Возможно построение обобщенного параметра как функции от множества исходных параметров. Параметр оптимизации должен быть количественным, доступным для измерения и должен выражаться одним числом.

Если измерение параметра невозможно, то пользуются ранговой оценкой. Ранг – это оценка параметра оптимизации по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной, десятибалльной и т. п. Ранговый параметр имеет ограниченную дискретную область определения. В простейшем случае область содержит два значения: да – нет; хорошо – плохо; брак – годные детали и т. д. При прочих равных условиях предпочтение необходимо отдавать количественному измерению, так как ранговая оценка носит субъективный характер.

Параметр оптимизации должен быть однозначным в статистическом смысле, т. е. заданному сочетанию уровней факторов должно соответствовать одно (с точностью до ошибки эксперимента) значение параметра оптимизации; эффективным в статистическом смысле, т. е. определяться с наибольшей точностью, что позволяет сократить до минимума число параллельных экспериментов; существовать для всех состояний исследуемого объекта; иметь физический смысл.

Факторы. Фактором называют независимую переменную величину, влияющую на параметр оптимизации. Каждый фактор имеет область определения – совокупность всех значений, которые может принимать фактор.

При исследовании процесса необходимо учитывать все существенные факторы. Если по каким-либо причинам влияние некоторых факторов невозможно учесть в эксперименте, то эти факторы должны быть стабилизированы на определенных уровнях в течение всего эксперимента. Уровнями называют значения факторов в эксперименте. Если число факторов велико, то необходимо отсеять те факторы, которые оказывают незначительное влияние на параметр оптимизации.

Однако измерения существенных факторов и параметров практически всегда содержат ошибки, вызываемые неточностью измерительных приборов и незнанием некоторых факторов. В силу этого математическая модель является только приближенным описанием свойств изучаемого объекта и главным вопросом математического моделирования является вопрос о том, как точно составленная математическая модель отражает отношения между учитываемыми факторами, параметрами и показателем оцениваемого свойства реального объекта.

ТЕСТЫ

1 Что называют математической моделью?

- а) приближенное описание технологического процесса;
- б) математическую зависимость между параметрами сварочного процесса;

в) математический расчет взаимодействий объектов реального мира;

г) приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики.

2 *Моделирование как эффективный метод исследования:*

а) построение и изучение специальных объектов (моделей), свойства которых подобны наиболее важным, с точки зрения исследователя, свойствам исследуемых объектов (оригиналов);

б) построение математических зависимостей объектов с окружающим миром;

в) графическое представление взаимодействий изучаемых объектов с окружающим миром.

3 *Что называют «черным ящиком»?*

а) кибернетический подход к изучению свойств объекта;

б) объект исследования, когда известны входные и выходные параметры, но не известны зависимости между ними;

в) это управляемые и неуправляемые параметры изучаемого объекта.

4 *Что обозначают понятия «фактор» и «отклик»:*

а) известные математические величины, характеризующие объект;

б) входные величины называют *факторами*, а зависимость выходной величины от входной – *откликом*;

в) зависимость выходной величины от входной называют фактором, а ее графическое изображение – откликом.

5 *Объект моделирования:*

а) ограниченная область реальной действительности или область идеальных представлений, подлежащая описанию (моделированию) и исследованию;

б) нечто реально существующее, или возникающее в нашем сознании и обладающее свойствами, значения которого позволяют нам однозначно распознавать это нечто;

в) нечто существующее реально, значения и свойства которого могут быть описаны математическим образом.

2 ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Обычно моделирование проводят в несколько этапов [2].

Построение модели. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект – явление природы, конструкция, состав порошковой проволоки, режим точечной сварки и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

Решение математической задачи, к которой приводит модель. Здесь большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи с помощью компьютера, при помощи которого результат может быть найден с нужной точностью и за допустимое время.

Интерпретация полученных следствий из математической модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области. Решение обычно получают в кодированных показателях, поэтому обязателен перевод из кодированных показателей в натуральные (ток, напряжение, длина дуги и т. п.).

Проверка адекватности модели. На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

Модификация модели. Происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Математические модели классифицируют по различным признакам, например, по характеру решаемых проблем модели могут быть функциональные и структурные. В первом случае все величины, характеризующие явление или объект, выражаются количественно. При этом одни из них рассматриваются как независимые переменные, а другие – как функции от этих величин.

Математическая модель обычно представляет собой систему уравнений разного типа (дифференциальных, алгебраических и т. д.), устанавливающих количественные зависимости между рассматриваемыми величинами. Во втором случае модель характеризует структуру сложного объекта, состоящего из отдельных частей, между которыми существуют определенные связи. Как правило, эти связи не поддаются количественному измерению. Для построения таких моделей удобно использовать теорию графов. **Граф** – это математический объект, представляющий собой некоторое множество точек (вершин) на плоскости или в пространстве, некоторые из которых соединены линиями (ребрами).

По характеру исходных данных и результатов предсказания модели могут быть разделены на детерминистические и вероятностно-статистические. Модели первого типа дают определенные, однозначные предсказания. Модели второго типа основаны на статистической информации, а предсказания, полученные с их помощью, имеют вероятностный характер.

Традиционно решение задач по моделированию систем сводится к двум типам [3]: *первая задача* ставится следующим образом.

Имеется система **S** (рис. 2) с фиксированным выходным вектором **X (t)**, управляемым входным вектором **U (t)**, выходным вектором **Z (t)**, связанным с **X (t)** и **U (t)** некоторым оператором. Здесь **(t)** – время.

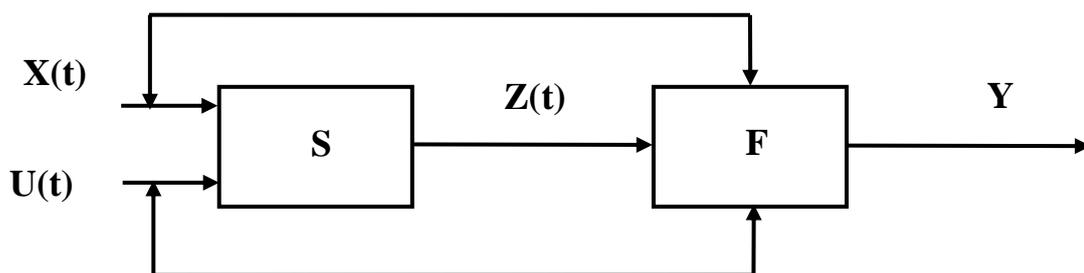


Рисунок 2 – Структура модели динамической оптимизации

Определен некоторый целевой функционал:

$$Y = F (X (t), U (t), Z (t)). \quad (1)$$

Требуется найти такую функцию, которая обеспечивает экстремум **Y**. Задачи такого рода решаются в курсе теории математического управления.

Имеется довольно обширный класс задач исследования и проектирования систем, где входные и выходные векторные переменные не зависят от времени. В таком случае обычно говорят, что рассматривается статическая модель системы (рис. 3), которая выглядит следующим образом:

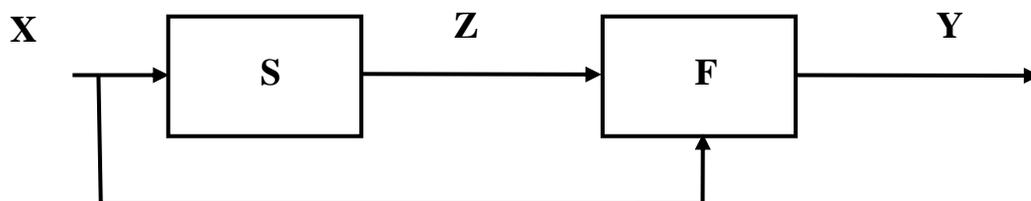


Рисунок 3 – Структура модели статической оптимизации

В рамках статической модели определяется целевая функция:

$$Y = F (X, Z). \quad (2)$$

При этом считают, что все входные переменные системы X могут выбираться из некоторой заданной области, а все неизменяемые параметры включены в оператор S . Переменная Z в этом случае может рассматриваться как функция $Z(X)$, и тогда Y является функцией X .

Задачей статического моделирования, а также статической оптимизации является выбор значений X , дающих экстремум функции:

$$Y = F(X) \quad (3)$$

В том случае, если область, из которой выбираются значения X , составляет все пространство (выбор неограничен), соответствующую задачу называют задачей безусловной оптимизации. А в том случае, когда область выбора значений может быть ограничена с помощью системы неравенств $G(X) \geq 0$ и т. п., говорят, что имеется задача условной оптимизации, понимая под условиями соответствующие ограничения выбора.

ТЕСТЫ

1 Этапы математического моделирования:

а) построение модели, проверка адекватности модели, модификация модели;

б) математический расчет результатов исследований, графическое представление полученного результата, модификация модели;

в) построение модели, решение математической задачи, к которой приводит модель, интерпретация полученных следствий из математической модели, проверка адекватности модели, модификация модели.

2 Различие между функциональными и структурными моделями:

а) функциональные модели – величины, характеризующие явление или объект, выражаются количественно; структурные – модель характеризует структуру сложного объекта, состоящего из отдельных частей, между которыми существуют связи, не поддающиеся количественному измерению;

б) функциональные модели – математическое описание не только объектов, но и структурных связей внутри объектов;

в) функциональные модели – не поддаются количественному измерению, их можно описать с помощью теории графов.

3 Структура модели статической оптимизации:

а) входные и выходные векторные переменные не зависят от времени;

б) входные и выходные векторные переменные связаны математическими зависимостями;

в) входные и выходные векторные переменные связаны функциональными зависимостями.

3 МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧИ

Математическая модель является не самоцелью, а только средством для решения определенной проблемы. В связи с этим необходимость создания математической модели вытекает из выбираемой исследователем методологии решения проблемы. Для решения сложных проблем обычно применяют так называемый *системный подход*, в котором моделирование является основным методом исследования [4]. В целом системный подход предполагает следующие этапы решения проблемы:

- ❖ изучение предметной области (обследование),
- ❖ выявление и формулирование проблемы,
- ❖ математическая (формальная) постановка проблемы,
- ❖ натурное или математическое моделирование исследуемых объектов и процессов,
- ❖ статистическая обработка результатов моделирования,
- ❖ формулирование альтернативных решений,
- ❖ оценка альтернативных решений,
- ❖ формулирование выводов и предложений по решению проблемы.

В общем случае процесс исследования можно представить в виде следующей формальной системы (4):

$$\begin{aligned} Y_{(t)} &= f [X_{(t)}, \Theta_{(t)}] - \text{функция выходов,} \\ \Theta_{(t)} &= g [X_{(t)}, \Theta_{(t-1)}] - \text{функция переходов,} \\ X_{(t)} &= u[Y_{(t-1)}] - \text{функция управления процессом.} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $X_{(t)}$ – множество значений входных факторов в момент времени t , $\Theta_{(t)}$ – множество значений параметров, характеризующих различные внутренние состояния сложной системы в этот же момент времени, $Y_{(t)}$ и $Y_{(t-1)}$ – множества значений измеряемых показателей изучаемых свойств системы в обозначенные моменты времени.

Первые два уравнения моделируют суть изучаемого процесса, а третье уравнение является математическим описанием (моделью) процесса воздействий исследователя на изучаемую систему.

Исследователю, как правило, доступно только определенное подмножество $Y'_{(t)}$ наблюдаемых параметров и весьма ограниченное подмножество $X'_{(t)}$ управляемых факторов. Его представление о внутренних состояниях исследуемой системы также ограничено некоторым подмножеством $\Theta'_{(t)}$. Поэтому в представлении исследователя математическая модель исследуемой им системы имеет вид (5):

$$\begin{aligned} f' [X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] &= Y''_{(t)} \\ g' [X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] &= \Theta'_{(t+1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В целом формализованная схема процесса исследования сложной системы может быть представлена, как показано на рисунке 4.

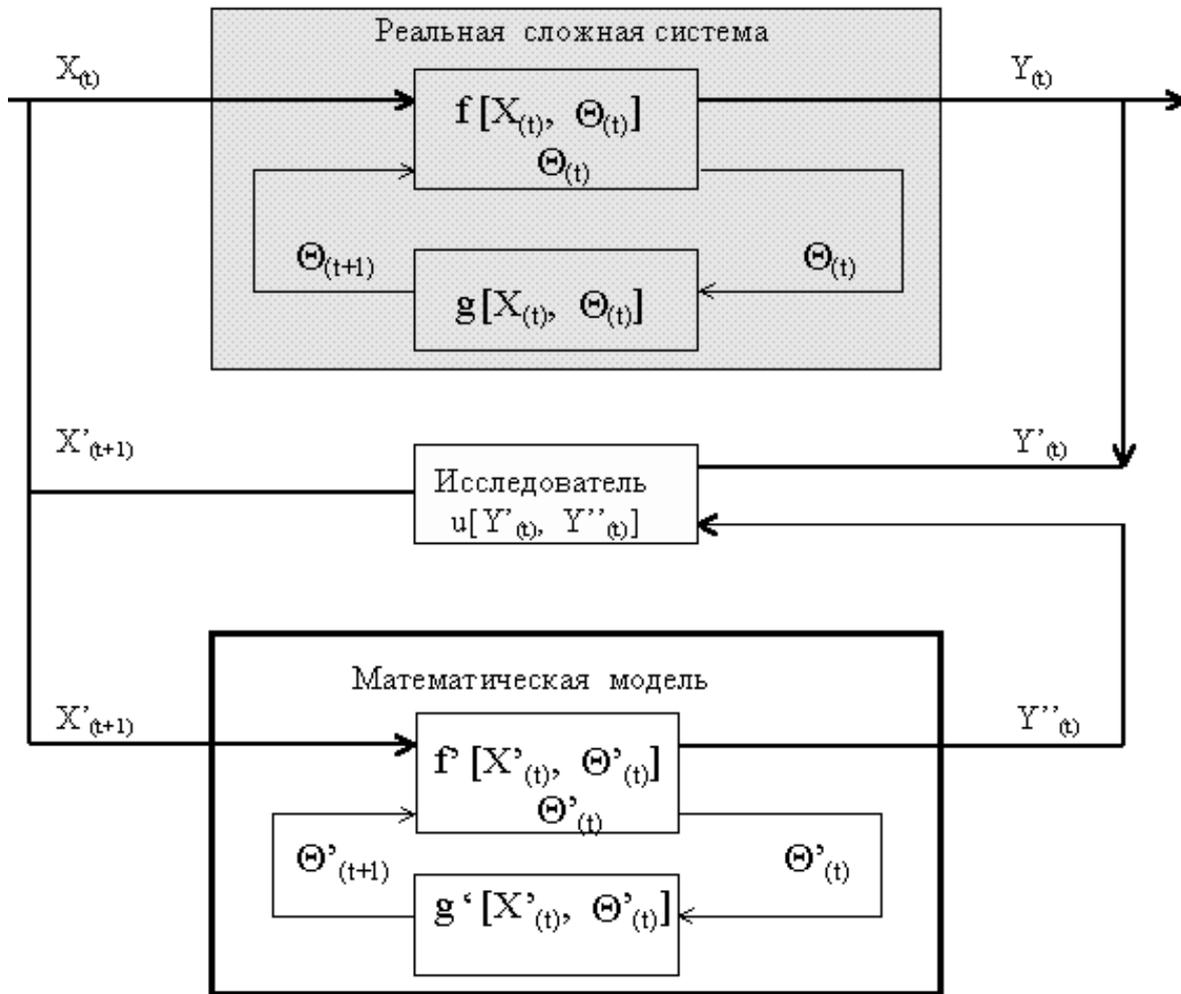


Рисунок 4 – Формализованная схема процесса исследования сложной системы

Таким образом, необходимость математического моделирования является основой системного подхода к решению сложных проблем. Разработка математических моделей представляет собой сложную исследовательскую задачу, процесс решение которой состоит из следующих этапов:

- концептуальное проектирование,
- эскизное проектирование,
- техническое проектирование,
- рабочее проектирование,
- постановка и проведение модельного эксперимента,
- статистическая обработка результатов моделирования,
- формирование альтернативных решений исследуемой проблемы.

Чаще всего эксперимент ставят для решения одной из двух основных задач. Первую задачу называют экстремальной. Она заключается в отыскании условий процесса, обеспечивающих получение оптимального значе-

ния выбранного параметра. Признаком экстремальных задач является требование поиска экстремума некоторой функции. Эксперименты, которые ставят для решения задач оптимизации, называют экстремальными.

Вторую задачу называют интерполяционной. Она состоит в построении интерполяционной формулы для предсказаний значений изучаемого параметра, зависящего от ряда факторов.

Для решения экстремальной или интерполяционной задачи необходимо иметь математическую модель исследуемого объекта. Модель объекта получают, используя результаты опытов. При исследовании многофакторного процесса постановка всех возможных опытов для получения математической модели связана с огромной трудоемкостью эксперимента, так как их число очень велико. Задача планирования состоит в установлении минимально необходимого числа экспериментов и условий их проведения, в выборе методов математической обработки результатов и в принятии решений. Планирование экспериментов значительно сокращает их число, необходимое для получения модели процесса. Частным случаем планирования эксперимента является планирование экстремального эксперимента, т. е. процесс выбора их числа и условий проведения, минимально необходимых для нахождения экстремальных экспериментов с помощью метода Бокса-Уилсона, называемого методом «крутого восхождения».

Метод Бокса-Уилсона предусматривает проведение экспериментов небольшими сериями. В каждой серии одновременно варьируют все факторы по определенным правилам. Эксперименты проводят так, чтобы после математической обработки результатов предыдущей серии можно было спланировать следующую серию.

При планировании экстремального эксперимента цель исследования должна быть четко сформулирована и должна иметь количественную оценку. Характеристику цели, заданную количественно, называют параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией, или откликом, на воздействие факторов, определяющих поведение процесса. Результаты эксперимента используют для получения математической модели исследуемого процесса.

Математическая модель – система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление. При планировании эксперимента под математической моделью часто понимают уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Такое уравнение называют функцией отклика.

При постановке экстремальных экспериментов на первом этапе находят область оптимума. На втором этапе стремятся получить более полное представление о поверхности отклика в области оптимума. Решение экстремальной задачи предусматривает получение функции отклика и нахождение с помощью ее оптимальных условий протекания процесса.

В общем виде функция отклика, являющаяся и параметром оптимизации y , может быть представлена зависимостью (6) [1]:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (6)$$

где x_1, x_2, \dots, x_k – независимые переменные факторы.

Если функция отклика известна, то оптимальные условия процесса находят аналитически, без постановки эксперимента. Однако часто приходится решать экстремальные задачи при неполном знании механизма процесса. В этом случае зависимость функции отклика неизвестна, и поэтому вынуждены ограничиваться представлением ее, например, полиномом вида:

$$\gamma = \mu_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_{12} x_1 x_2 + \mu_{11} x_1^2 \dots, \quad (7)$$

где μ_0, μ_1, \dots – коэффициенты регрессии при соответствующих переменных.

По результатам эксперимента можно определить только выборочные коэффициенты регрессии $b_0, b_1, b_2, b_{12}, \dots$, которые являются лишь оценками теоретических коэффициентов регрессии $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_{12}$. Уравнение регрессии, полученное на основании экспериментов и представляющее собой выборочную оценку y функции отклика η , может быть записано следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_k x_k. \quad (8)$$

На первом этапе планирования эксперимента для определения направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика функцию отклика выражают полиномом первой степени.

Для определения коэффициентов уравнения (8) достаточно реализовать факторный эксперимент типа 2^k , где k – число факторов. Планы экспериментов типа 2^k называют планами первого порядка.

Крутое восхождение заканчивают после достижения области оптимума. Область оптимума чаще всего удается описать полиномом второй степени:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{(k-1)k} x_{(k-1)} x_k + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{kk} x_k^2. \quad (9)$$

Чтобы определить все коэффициенты уравнения (9), необходимо реализовать план эксперимента, в котором каждый фактор варьируется не менее чем на трех уровнях. Планы эксперимента, позволяющие оценить коэффициенты полинома второй степени, называют планами второго порядка.

Экстремальные задачи часто решают, используя шаговый метод.

В этом случае модель должна удовлетворять требованиям этого метода. В основе шагового метода лежит предположение, что совокупность значений параметра оптимизации y , полученная при различных сочетаниях факторов x_i , образует поверхность отклика. Для наглядности представле-

ния о поверхности отклика при наличии $y_{\text{шах}}$ рассмотрим простейший случай, при котором число факторов равно двум (x_1 и x_2). Для каждого фактора установлены два значения: максимальное и минимальное. Между этими значениями каждый фактор может изменяться непрерывно или дискретно.

Границы значений факторов образуют на плоскости x_1 O x_2 (рис. 4) прямоугольник $ABCD$, внутри которого лежат точки возможных значений x_1 и x_2 . Если по оси y откладывать значения y_i , полученные при различных сочетаниях значений факторов, то точки y_i будут лежать на поверхности отклика. На этой поверхности находится точка M , соответствующая оптимальному значению y . Для нахождения этой точки необходимо шаг за шагом двигаться по поверхности отклика. Шаговый метод исходит из предположения, что поверхность отклика является гладкой и имеет единственный оптимум.

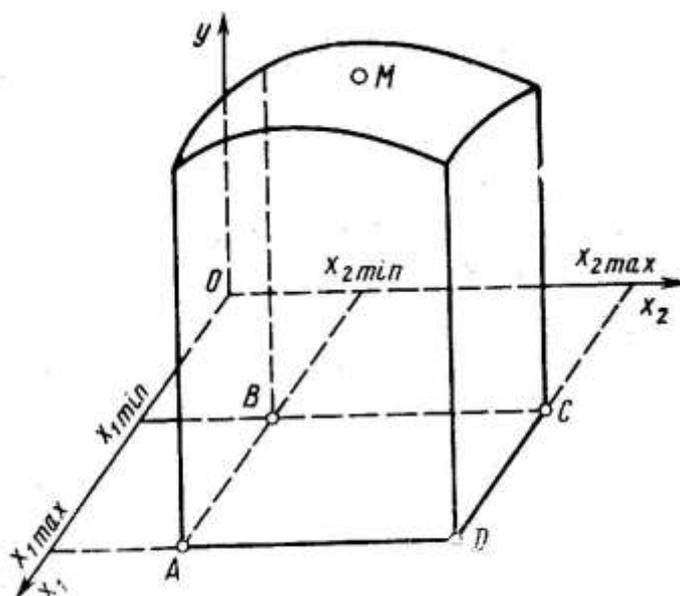


Рисунок 4 – Изображение поверхности отклика

Поверхность отклика расположена в $k + 1$ -мерном пространстве, которое называют факторным. Размерность факторного пространства зависит от числа k факторов. При большом числе факторов это пространство является многомерным и геометрическая интерпретация функции отклика становится невозможной. Для описания в многомерном пространстве поверхности отклика пользуются языком алгебры. Гладкость поверхности отклика и наличие на ней одной точки оптимума позволяют двигаться к последней в любом направлении, независимо от исходной точки.

При шаговом методе каждому фактору придают два значения: максимальное и минимальное. Эти значения составляют только часть возможных значений факторов. На первом этапе реализации шагового метода выбирается лишь какая-то подобласть из области возможных значений факторов и в этой подобласти ставится эксперимент.

На основании результатов этого эксперимента строится первая модель, по которой предсказываются отклики для значений факторов, выходящих за пределы выбранной подобласти. Чем дальше от этой подобласти лежит точка, определяющая значения факторов, тем с меньшей точностью путем экстраполяции можно предсказать значение отклика для этой точки. Поэтому экстраполяцию производят вблизи подобласти эксперимента и используют ее для выбора условий проведения следующего эксперимента, т. е. устанавливают новые интервалы значений факторов или выбирают новую подобласть факторного пространства. Поставив новый эксперимент, строят вторую модель и на основании ее делают следующий шаг в направлении к оптимуму. В этом и заключается сущность шагового метода.

Исходя из сущности этого метода, к модели предъявляется главное требование, заключающееся в способности модели «предсказывать» направление дальнейших опытов с требуемой точностью. Это означает, что предсказанные по модели значения отклика должны отличаться от фактических не более чем на некоторую наперед заданную величину. Модель, удовлетворяющую этому требованию, называют адекватной. Если имеется несколько удовлетворяющих указанному требованию моделей, то из них выбирается наиболее простая.

Наиболее простой моделью является полином. Полином линеен относительно неизвестных коэффициентов, что упрощает обработку наблюдений.

Полином может быть первой, второй и более высокой степени. Коэффициенты полинома вычисляют по результатам экспериментов. Чем больше число коэффициентов в полиноме, тем большее количество экспериментов необходимо поставить для их определения. Число коэффициентов зависит от степени полинома: чем выше степень, тем больше число коэффициентов. На первом этапе планирования – определении направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика – наиболее целесообразно неизвестную функцию отклика аппроксимировать полиномом первой степени.

Аппроксимация – это замена одной функции другой, в каком-то смысле эквивалентной первой. Полином первой степени имеет минимальное число коэффициентов при данном числе факторов и содержит необходимую информацию о направлении градиента, под которым понимают направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. После достижения путем постепенного перемещения по поверхности отклика подобласти, в которой лежит точка оптимума, иногда для более полного описания этой подобласти переходят от полинома первой степени к полиному второй степени. Полином первой степени в общем виде выражается уравнением (10):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{13} x_1 x_3 + \dots + b_{12 \dots k} x_1 x_2 \dots x_k. \quad (10)$$

Для трех факторов это уравнение имеет вид (11):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (11)$$

Полином второй степени для трех факторов (12):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (12)$$

Таким образом, можно с помощью полиномов необходимой степени выразить любое уравнение математической модели.

ТЕСТЫ

1 Системный подход к моделированию:

а) статистическая обработка результатов моделирования, натурные испытания, выявление альтернативных вариантов, выводы и предложения по решению проблемы;

б) построение модели, решение модели, выявление альтернативных вариантов, выводы и предложения по решению проблемы;

в) изучение предметной области, выявление и формулирование проблемы, математическая постановка проблемы, натурное или математическое моделирование исследуемых объектов и процессов, статистическая обработка результатов моделирования, формулирование и оценка альтернативных решений, выводы и предложения по решению проблемы.

2 Основные задачи, решаемые экспериментом:

а) поисковые, оптимальные;

б) оптимизация процесса, изучение всех возможных состояний объекта;

в) экстремальные, интерполяционные.

3 Графическое изображение поверхности отклика:

а) поверхность отклика можно изобразить в системе координат исследуемых факторов (двухмерная система координат);

б) поверхность отклика расположена в $k + 1$ -мерном пространстве, которое называют факторным;

в) поверхность отклика расположена в многомерном пространстве.

4 Наиболее простая математическая модель:

а) наиболее простой математической моделью является полином;

б) наиболее простой математической моделью является график зависимости отклика от исследуемых факторов;

в) наиболее простой математической моделью является поверхность отклика в дифференциальном виде.

4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ СВАРОЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Современные сварочные технологии невозможны без создания математических моделей и их оптимизации. В настоящее время в области сварочного производства накоплен значительный опыт по созданию *моделей для математического обеспечения САПР, математических моделей для экспертных систем, моделей для программного обеспечения сварочных роботов и робототехнических комплексов, математических моделей в системах управления процессами сварки.*

Один из примеров создания математической модели в области свариваемости низколегированных сталей приведен ниже [5].

Наиболее опасным проявлением недостаточной свариваемости низколегированных сталей являются холодные трещины. Значительные трудности вызывает обеспечение заданного комплекса механических и эксплуатационных свойств различных зон сварного соединения.

Накопленный опыт свидетельствует, что существенные резервы обеспечения свариваемости низколегированных сталей скрыты в правильном выборе теплового режима сварки и сварочных материалов. Однако отсутствие научно обоснованной методики такого выбора не позволяет эффективно использовать указанные резервы и приводит к применению традиционных решений – назначению подогрева, последующего отпуска сварных конструкций, либо к применению сварочных материалов аустенитного класса, хотя существует принципиальная возможность достижения положительного результата при использовании более дешевых сварочных материалов перлитного класса.

Перечисленные недостатки в значительной мере объясняются сложностью и большим числом взаимосвязанных процессов, протекающих в сталях при сварке, неоднозначной зависимостью показателей свариваемости от параметров технологии сварки. Очевидно, что только использование технических возможностей современной компьютерной техники для комплексного анализа технологических вариантов сварки путем моделирования совокупности протекающих в металле процессов позволит получать оптимальные технологические решения при значительном снижении ресурсоемкости самого процесса разработки.

Проектирование технологии сварки заключается в выборе способа сварки, сварочных материалов, определении параметров режима и условий сварки, а также дополнительных технологических мероприятий, обеспечивающих требуемое качество сварного изделия и необходимые технико-экономические производственные показатели. Применительно к сварке низколегированных сталей обычно регламентируются показатели сплошности, геометрические характеристики и комплекс механических свойств различных зон сварного соединения; технико-экономические показатели и

другие требования, отражающие специфику конкретного производства: имеющиеся производственные мощности, санитарно-гигиенические нормы, отраслевые нормы и т. п.

В основе проектирования обычно заложен принцип оптимизации – выбора наилучшего по какому-то критерию варианта из всех допустимых по техническому заданию решений. Для компьютерного проектирования необходима формализация объекта в виде адекватной математической модели, определение функции цели и выбор метода решения задачи оптимизации.

4.1 Формирование модели на основе системного анализа

Математическая модель вида (3) является математическим аналогом объекта. Под оператором F понимается полная система операций, описывающая численные и логические отношения между вектором входных параметров X и вектором выходных параметров Y (рис. 5).

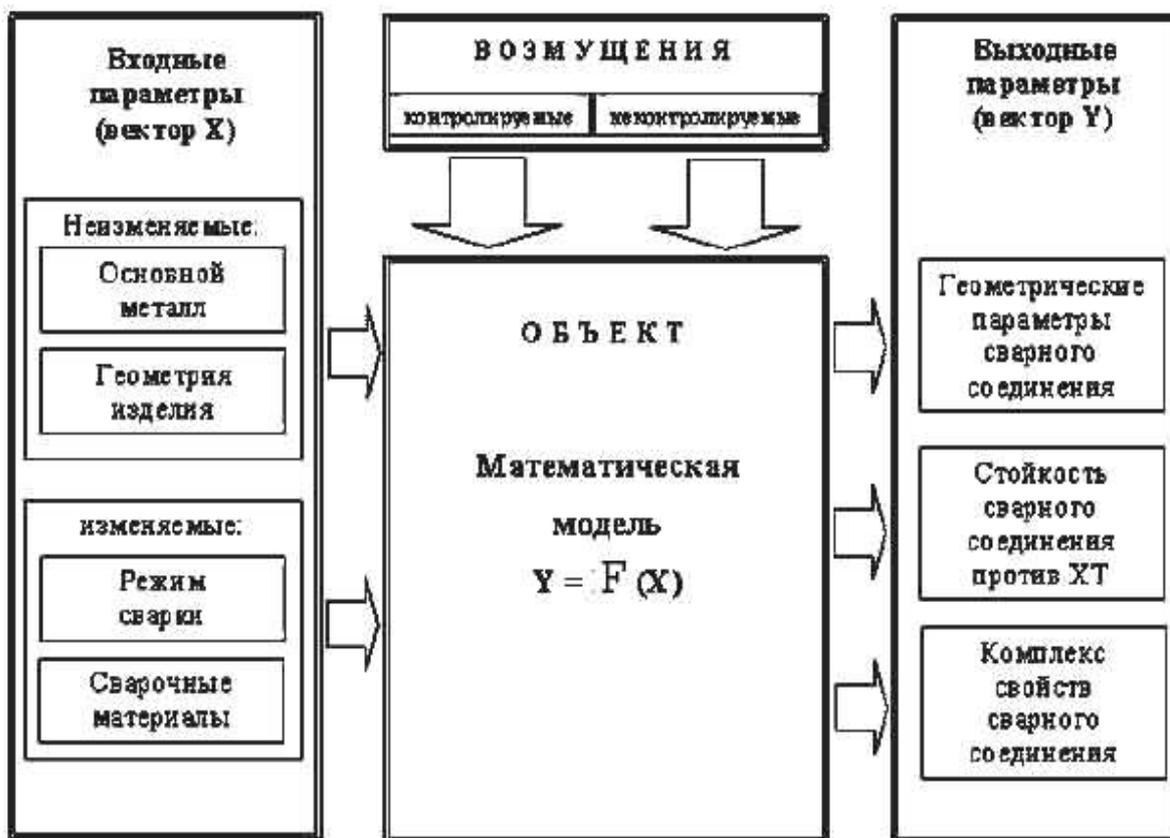


Рисунок 5 – Технология сварки как объект проектирования

Подобные модели решают задачу анализа, т. е. позволяют получать значения показателей Y при заданном наборе входных параметров X . Корректность анализа определяется степенью адекватности модели исследуемому объекту.

Анализ взаимосвязей процессов, определяющих формирование показателей свариваемости низколегированных сталей (рис. 6), показывает, что эти взаимодействия могут быть описаны ветвящейся структурой с обратными связями, что приводит к усложнению модели. Для принятия обоснованного решения об упрощениях модели необходим дополнительный анализ существенности выявленных обратных связей.

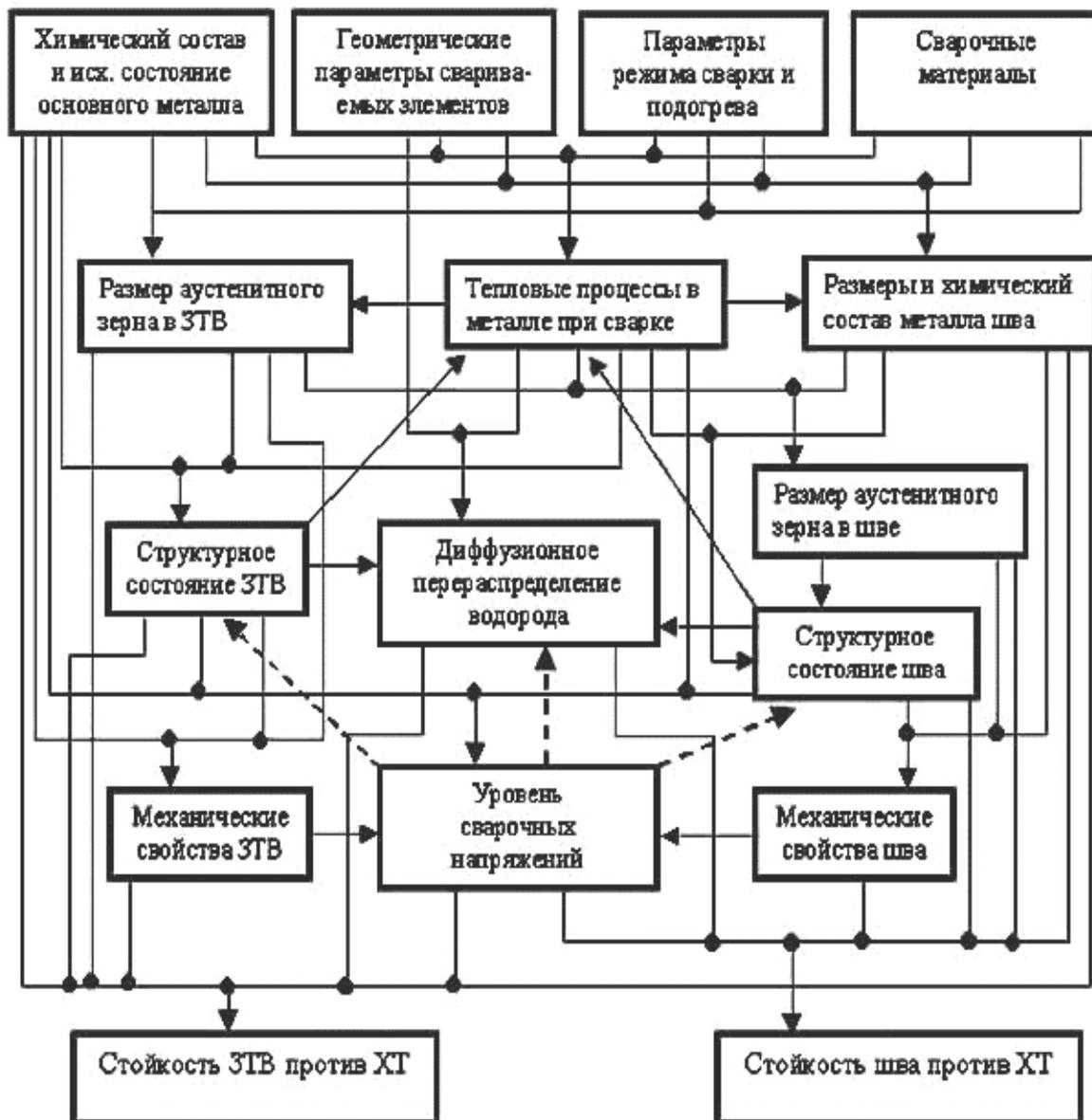


Рисунок 6 – Взаимосвязь показателей свариваемости низколегированных сталей

Обратное влияние структурных превращений на протекание тепловых процессов связано с изменением теплофизических свойств материала при превращениях, а также с тепловыми эффектами этих превращений. Учет этой взаимосвязи возможен путем совместного решения температурной и структурной задач.

Если подходы к учету влияния структурных превращений на низколегированные стали хорошо известны (через величину фазовых превращений и свойства материала), то количественное описание обратного влияния не позволяет учесть его в должной мере. По той же причине не учитывается влияние низколегированных сталей на диффузию водорода (пунктирные линии на рисунке 6).

В результате принятых допущений в математической модели отсутствуют обратные связи, и моделирование сводится к последовательному анализу процессов в порядке, определенном структурой связей на рисунке 7.

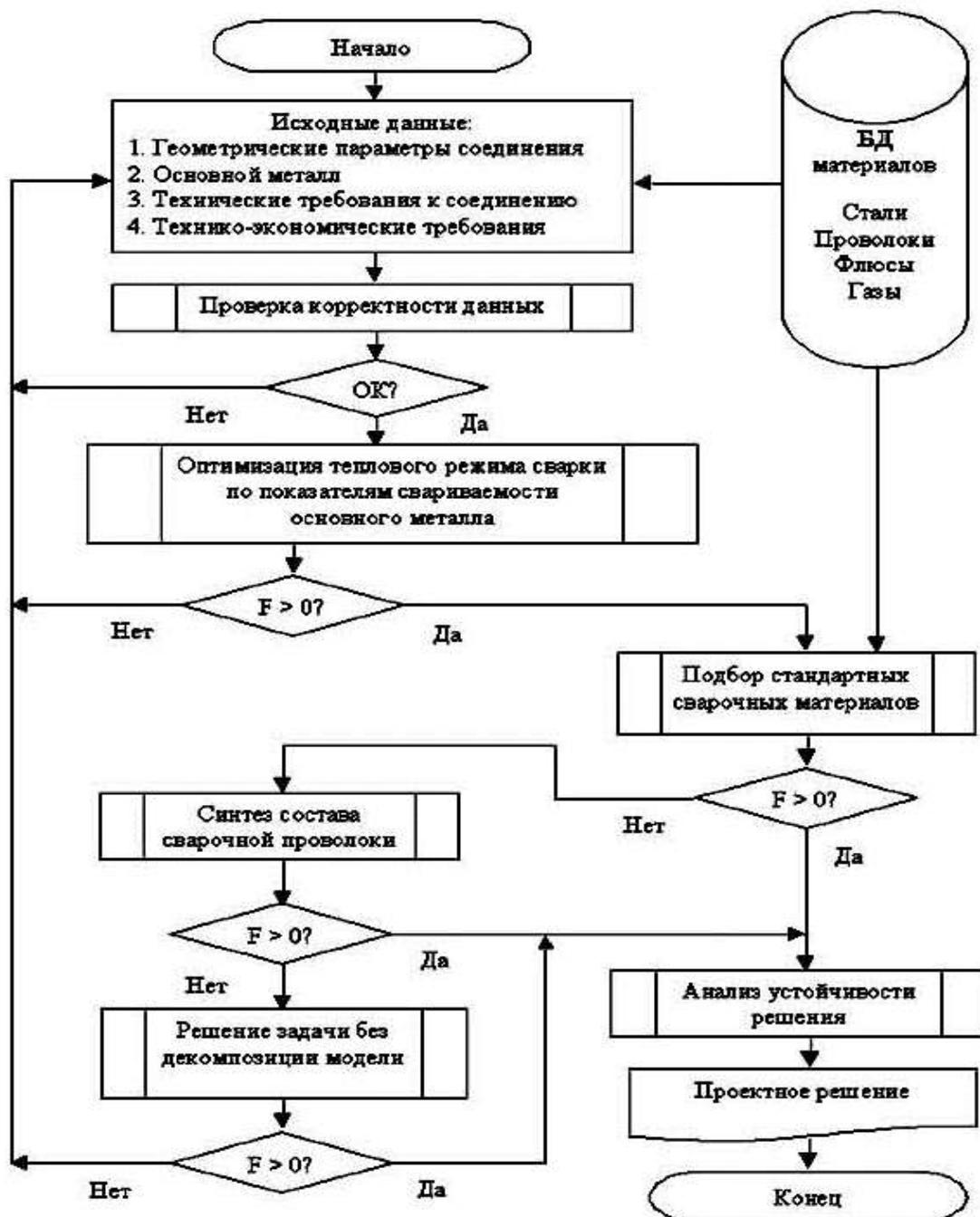


Рисунок 7 – Алгоритм решения задачи синтеза параметров технологии дуговой сварки в среде защитных газов

Для уменьшения трудоемкости математической модели формирования показателей свариваемости рассматривается не во всем объеме изделия, а лишь в объеме ширины зоны сварки, наиболее опасной с точки зрения образования холодных трещин.

4.2 Математическая формулировка цели проектирования

Как правило, целью проектирования технологии сварки является достижение наилучших технико-экономических показателей сварочного производства при обязательном условии обеспечения требуемого уровня качества изделия. Поскольку выполнение комплекса технических требований является неременным условием пригодности проектного решения, то степень выполнения каждого из условий работоспособности вида $y_j < TT_j$ должна учитываться при вычислении целевой функции. Для устранения проблем, связанных с различной размерностью и физической сущностью показателей, входящих в условия работоспособности, целесообразно использовать безразмерные величины, учитывающие разброс выходных параметров объекта [5, 6].

$$z_j = a_j \cdot \left(\frac{TT_j - y_j}{\delta_j} - 1 \right), \quad (13)$$

где z_j – запас работоспособности по j -му выходному параметру; a_j – коэффициент, отражающий важность выходного параметра; TT_j – нормативное значение выходного параметра; y_j – текущее значение выходного параметра; δ_j – величина, характеризующая разброс параметра.

Максимизация минимальной из оценок z_j повышает вероятность выполнения того из условий работоспособности, которое характеризуется в данный момент наименьшей вероятностью выполнения [6]. Таким образом, синтез параметров технологии сварки низкоуглеродистых сталей сводится к следующей математической формулировке: для объекта, описываемого моделью $Y = F(X)$ определить такой вектор входных параметров X , лежащий в области допустимых решений X_d , чтобы:

- во-первых, достичь максимума целевой функции минимального запаса работоспособности;

- во-вторых, обеспечить в δ -окрестности точки X , определяемой возможными возмущениями по входным параметрам, устойчивое по выходным параметрам состояние:

$$\begin{aligned} F(X) &= \max(\min z_j) \\ X &\in X_d, j = [1..m] \\ F(X + \delta X) &= \min z_j > 0 \\ j &= [1..m] \end{aligned} \quad (14)$$

4.3 Выбор метода решения задачи синтеза и алгоритм решения

Важным свойством целевых функций является их гладкость, в частности, отсутствие гребней. Сложность поиска экстремума гребневой функции заключается в том, что при переходе через гребень градиент целевой функции резко меняет свое направление на почти противоположное, в то время как наилучшим направлением поиска является касательная к гребню. Это приводит обычно к «заклиниванию» поиска в окрестностях гребня.

Анализ физической сущности технических требований, предъявляемых к сварному соединению из низколегированных сталей, показывает, что они являются противоречивыми: улучшение одного показателя, например, повышение прочности приводит к ухудшению технических требований, причем возможно даже отсутствие приемлемого проектного решения. Область поиска проектных решений определяется как прямыми ограничениями на входные параметры, так и функциональными. Следовательно, при выборе метода решения необходимо ориентироваться на методы условной оптимизации с ограничениями.

Учитывая конфликтность выходных параметров модели, можно сделать вывод о неизбежности возникновения гребневой ситуации в процессе поиска, что позволяет рассматривать задачу оптимизации по максимальному критерию как задачу поиска при наличии ограничений типа равенств. Для решения таких задач имеется эффективный метод поиска – **метод проекции градиента**. При его использовании траектория поиска проходит вдоль вершины гребня, чем обеспечивается существенно более быстрое продвижение к цели, чем при применении градиентных методов или методов прямого поиска [6]. Наибольшей гибкостью обладают интерактивные средства проектирования, позволяющие использовать опыт специалиста при анализе промежуточных результатов и принятии решений. В качестве примера приведен алгоритм интерактивной процедуры применительно к синтезу параметров технологии сварки низколегированных сталей в среде защитных газов (рис. 8).

Работа с помощью такого алгоритма выполняется следующим образом. На этапе проверки корректности исходных данных оценивается и принципиальная возможность достижения приемлемого решения. Поскольку показатели свариваемости являются структурно-зависимыми характеристиками, определяется допустимый диапазон структурных состояний низколегированных сталей, обеспечивающих выполнение технических требований к комплексу свойств зоны термического влияния. В случае невозможности выполнения указанных технических требований они признаются несовместными и подлежат корректировке.

Для уменьшения трудоемкости синтеза целесообразно произвести декомпозицию модели по связи шов – зона термического влияния и решать задачу последовательно: сначала найти решение для основного металла без вариации состава металла шва (технические требования к основному металлу, как правило, являются более жесткими), а потом выбрать сварочную проволоку.

Оптимизация теплового режима сварки производится для обеспечения требуемого комплекса свойств зоны термического влияния. На этом этапе расчета определяются параметры режима сварки и подготовки кромок соединения, обеспечивающие получение сварного шва заданных размеров, а также температура подогрева для достижения требуемого структурного состояния металла в зоне термического влияния и стойкости сварного шва к образованию холодных трещин. После выбора теплового режима предпринимается попытка подбора стандартной сварочной проволоки из базы данных. Выбор признается удачным, если все технические требования к металлу шва (в том числе по стойкости к холодным трещинам) выполняются, и при этом показатель сопротивляемости зоны термического влияния не опускается ниже заданного уровня.

При отсутствии подходящей стандартной проволоки может быть рассчитан ее требуемый химический состав и сформулировано техническое задание на изготовление специальной проволоки. Последним этапом является проверка устойчивости найденного решения при колебаниях входных параметров в пределах их естественного разброса. Решение признается устойчивым, если проверка методом наихудшего случая не выводит его за пределы области качества; в противном случае необходима корректировка решения.

ТЕСТЫ

1 Что включает в себя проектирование технологии сварки?

- а) разработка технического задания на проектирование приспособлений сборки-сварки, определение режимов сварки, выбор способа сварки;
- б) выбор способа сварки, сварочных материалов, определение параметров режима и условий сварки, а также дополнительные технологические мероприятия, обеспечивающие требуемое качество сварного изделия и необходимые технико-экономические производственные показатели;
- в) разработка технологических мероприятий, обеспечивающих требуемое качество сварного изделия и необходимые технико-экономические производственные показатели.

2 Входные параметры математической модели:

- а) геометрические размеры сварного соединения;
- б) стойкость сварного соединения против холодных трещин;
- в) основной металл, геометрия изделия, режим сварки, сварочные материалы.

3 Выходные параметры математической модели:

- а) геометрические параметры сварного соединения;
- б) стойкость сварного соединения против холодных трещин;
- в) сварочные материалы;
- г) геометрические параметры сварного соединения, стойкость сварного соединения против холодных трещин, комплекс свойств сварного соединения.

5 ЭТАПЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ 2-ГО ПОРЯДКА

Для нахождения уравнения регрессии 2-го порядка и выполнения статистического анализа модели необходимо [4, 7, 8]:

- составить таблицу кодирования факторов;
- составить план-матрицу эксперимента;
- рандомизировать опыты и реализовать план эксперимента;
- проверить воспроизводимость опытов;
- рассчитать коэффициенты регрессии;
- оценить значимость коэффициентов регрессии;
- проверить адекватность модели;
- привести уравнение регрессии к натуральным факторам;
- исследовать модель 2-го порядка на выпуклость и вогнутость методами дифференциального исчисления и определить тип поверхности отклика;
- построить графики зависимости отклика от каждого из факторов $y = f(x_i)$ при фиксированных значениях остальных факторов (каждый рисунок должен содержать 3-4 кривые);
- применяя один из методов оптимизации, найти в исследованной области оптимальные сочетания факторов, обеспечивающие максимальное и минимальное значения отклика.

5.1 Составление таблицы кодирования факторов

Рассмотрим на примере построения математической модели влияния напряжения на дуге U_d , вылета электрода L_B , температуры предварительного подогрева изделия T_H на ширину шва наплавленного валика B . Выполнялась наплавка порошковой проволокой диаметром 3 мм. По технологическим соображениям выбрана следующая область исследований:

$$U_d = 21\text{--}27 \text{ В}, L_B = 20\text{--}60 \text{ мм}, T_H = 50\text{--}350^\circ\text{С}.$$

Для исследования применяем центральное композиционное ортогональное планирование 2-го порядка. В качестве ядра использовали план 2^3 .

К оптимизации приступают при наличии некоторых результатов предварительных исследований изучаемого объекта. Решение задачи оптимизации начинают с выбора области эксперимента. Выбор этой области производят на основе анализа априорной информации.

В области эксперимента устанавливают основные уровни и интервалы варьирования факторов. Основным или нулевым уровнем фактора называют его значение, принятое как исходное в плане эксперимента. Основные уровни выбирают таким образом, чтобы их сочетание отвечало

значению параметра оптимизации, по возможности более близкому к оптимальному. Каждое сочетание уровней факторов является многомерной точкой в факторном пространстве. Сочетание основных уровней принимают за исходную точку для построения плана эксперимента. Построение плана эксперимента состоит в выборе экспериментальных точек, симметричных относительно исходной точки или, что одно и то же, центра плана.

Интервалом варьирования фактора называют число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень фактора, а вычитание – нижний. Интервал варьирования не может быть выбран меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, а также не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни выходили за пределы области определения фактора. При этом необходимо учитывать, что увеличение интервалов варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают **+1**, нижний **-1**, а основной **0**. Кодированное значение фактора x_i определяют по зависимости (15):

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\xi_i}, \quad (15)$$

где X_i – натуральное значение i -го фактора; X_{i0} – натуральное значение основного уровня i -го фактора; ξ_i – интервал варьирования i -го фактора. При кодировании качественных факторов, имеющих два уровня, верхний уровень обозначается **+1**, а нижний **-1**.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора m , а число факторов k , то число N всех сочетаний уровней факторов, а, следовательно, и число экспериментов определяется зависимостью (16):

$$N = m^k. \quad (16)$$

Цель первого этапа планирования экстремального эксперимента – получение линейной модели – предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Заполняем таблицу кодирования факторов (табл. 1) и дополняем ее звездными точками [3, 4, 7].

Звездные точки можно рассчитать по формуле (17):

$$d = \sqrt{\frac{N\varphi - 2^k}{2}}, \quad (17)$$

где N – количество экспериментов, φ – величина, зависящая от числа факторов и плеча d , k – число факторов.

Таблица 1 – Кодирование факторов

Интервал варьирования и уровни факторов	U _д , В	L _в , мм	T _и , °С
Интервал варьирования, ξ_i	3	20	150
Нулевой интервал (уровень), $x_i = 0$	24	40	200
Нижний уровень, $x_i = -1$	21	20	50
Верхний уровень, $x_i = +1$	27	60	350
Звездные точки, $x_i = -d$	20,35	16	18
$x_i = +d$	27,65	64	382
Кодовое обозначение	x_1	x_2	x_3

Кроме расчета звездных точек по формуле, звездные точки можно определить и по таблице 2.

Таблица 2 – Параметры ортогональных планов второго порядка

k	Ядро плана	Общее число опытов	ϕ	d
2	2^2	9	0,667	1,0
3	2^3	15	0,730	1,215
4	2^4	25	0,80	1,414
5	2^5	43	0,863	1,596

Для упрощения записи условий эксперимента в матрице планирования вместо +1 пишут только «+», а вместо -1 – только «-».

Для движения по градиенту необходима линейная модель.

При $k = 2$ моделью будет уравнение регрессии вида $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Значения коэффициентов в этом уравнении определяют с помощью значений функции отклика, полученных в результате экспериментов.

Под числом степеней свободы в статистике понимают разность между числом опытов и количеством коэффициентов модели, вычисленных по результатам этих экспериментов независимо друг от друга. Число степеней свободы f при линейной модели определяется по зависимости (18):

$$f = N - (k + 1), \quad (18)$$

где N – число экспериментов;

k – число факторов.

В таблице 3 приведена матрица факторного эксперимента.

Заполняем матрицу планирования (табл. 4).

Таблица 3 – Матрица факторного эксперимента

Номер эксперимента	x_1	x_2	y
1	-	-	y_1
2	+	-	y_2
3	-	+	y_3
4	+	+	y_4

Таблица 4 – Матрица планирования

Номер эксперимента	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Так, например, при двух факторах число N экспериментов равно четырем, а для определения коэффициентов уравнения регрессии (19)

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \quad (18)$$

достаточно результатов трех. Таким образом, число степеней свободы в рассматриваемом случае, равное единице, может быть использовано для проверки адекватности модели. Величина и знак коэффициента указывают на вклад данного фактора в общий результат при переходе с нулевого на верхний или нижний уровень фактора. Линейным называют эффект, характеризующий линейную зависимость параметра оптимизации от соответствующего фактора. Эффектом взаимодействия называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на параметр оптимизации.

Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценить линейные эффекты и все эффекты взаимодействия. Для полного факторного эксперимента типа 2^2 уравнение регрессии с учетом эффектов взаимодействия можно представить зависимостью (20):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2. \quad (20)$$

Для этого эксперимента матрица планирования приведена в таблице 4. В этой матрице содержится столбец фиктивной переменной x_0 . Он вводится для оценки свободного члена b_0 . Столбец x_1x_2 получен перемножением столбцов x_1 и x_2 . Он введен для расчета коэффициента b_{12} . При $k = 2$ построение матриц полного факторного эксперимента не вызывает затруднений, так как все возможные сочетания уровней факторов легко найти простым перебором. При увеличении числа факторов количество возможных сочетаний уровней быстро возрастает, поэтому возникает необходимость в некоторых приемах построения матриц.

Рассмотрим два наиболее простых приема.

Первый прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце (x_1) знаки чередуются поочередно, во втором они чередуются через 2, в третьем – через 4, в четвертом – через 8, в пятом – через 16 и т. д. по степеням двойки.

Второй прием основан на последовательном достраивании матрицы. Для этого при добавлении нового фактора необходимо повторить комбинации уровней исходного плана сначала при значении нового фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем.

Последовательное достраивание матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 5 показано в таблице 5.

5.2 Заполнение плана-матрицы проведения эксперимента (пример)

Составляем расширенную план матрицу проведения эксперимента (табл. 5). В эту же таблицу заносим результаты проведения эксперимента. В соответствии с планом было проведено 15 серий опытов, в каждой комбинации уровней факторов проводилось по три параллельных опыта.

Измерялись значения отклика функции **В** – ширина наплавленного валика (в таблице приведены средние значения ширины наплавленного валика).

5.3 Рандомизация опытов и реализация плана эксперимента

Чтобы учесть в эксперименте систематическое действие переменных, которые не поддаются, или поддаются с трудом, учету и контролю, матрицу плана подвергают рандомизации.

Случайный порядок реализации опытов, т.е. случайный порядок реализации строк матрицы плана - представляет принцип рандомизации, как один из вариантов рандомизации можно использовать таблицу случайных чисел [7].

В таблице 6 представлена рандомизированная план-матрица проведения эксперимента.

Рассматриваемый план является **ортогональным**, так как для него выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^n x_i x_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ n & i = j \end{cases} \quad (21)$$

где **n** – общее число опытов (число строк в матрице планирования), номер опыта,

i, j = 0, 1, ..., k; (**k** – число факторов).

Таблица 5 – Схема построения матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 5

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	+	+	+
3	+	+	-	+	+	+
4	+	-	-	+	+	+
5	+	+	+	-	+	+
6	+	-	+	-	+	+
7	+	+	-	-	+	+
8	+	-	-	-	+	+
9	+	+	+	+	-	+
10	+	-	+	+	-	+
11	+	+	-	+	-	+
12	+	-	-	+	-	+
13	+	+	+	-	-	+
14	+	-	+	-	-	+
15	+	+	-	-	-	+
16	+	-	-	-	-	+
17	+	+	+	+	+	-
18	+	-	+	+	+	-
19	+	+	-	+	+	-
20	+	-	-	+	+	-
21	+	+	+	-	+	-
22	+	-	+	-	+	-
23	+	+	-	-	+	-
24	+	-	-	-	+	-
25	+	+	+	+	-	-
26	+	-	+	+	-	-
27	+	+	-	+	-	-
28	+	-	-	+	-	-
29	+	+	+	-	-	-
30	+	-	+	-	-	-
31	+	+	-	-	-	-
32	+	-	-	-	-	-

Таблица 6 – План-матрица эксперимента

	№ п/п	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1^2-\varphi$	$x_2^2-\varphi$	$x_3^2-\varphi$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	B, мм
План эксперимента 2^3	1	1	-1		-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	10,87
	2	1	1		-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	17,6
	3	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	10,9
	4	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	17,8
	5	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	13,0
	6	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	18,3
	7	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	13,2
	8	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	19,0
Звездные точки	9	1	1,215	0	0	0,77	-0,73	-0,73	0	0	0	11,2
	10	1	1,215	0	0	0,77	-0,73	-0,73	0	0	0	18,0
	11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,77	-0,73	0	0	0	14,5
	12	1	0	1,215	0	-0,73	0,77	-0,73	0	0	0	14,2
	13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,77	0	0	0	13,0
	14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,77	0	0	0	15,5
Нулевая точка	15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	14,33

Таблица 7 – Рандомизированная план-матрица эксперимента

	№ п/п	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1^2-\varphi$	$x_2^2-\varphi$	$x_3^2-\varphi$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	B, мм
План эксперимента 2^3	9	1	1,215	0	0	0,77	-0,73	-0,73	0	0	0	11,2
	11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,77	-0,73	0	0	0	14,5
	3	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	10,9
	1	1	-1		-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	10,87
	5	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	13,0
	14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,77	0	0	0	15,5
	7	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	13,2
	15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	14,33
Звездные точки	2	1	1		-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	17,6
	6	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	18,3
	4	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	17,8
	8	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	19,0
	13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,77	0	0	0	13,0
	10	1	1,215	0	0	0,77	-0,73	-0,73	0	0	0	18,0
Нулевая точка	12	1	0	1,215	0	-0,73	0,77	-0,73	0	0	0	14,2

Если скалярное произведение двух векторов $x_i x_j$ равняется нулю, значит, векторы ортогональны. Так как любое скалярное произведение двух различных столбцов матрицы должно быть равно нулю, то планирование эксперимента называется **ортогональным**. Это правило показывает, что

в ортогональном планировании при четном числе уровней, на котором фиксируется каждый фактор, уровни должны быть симметричны относительно центральной точки $x = 0$, а при нечетном числе уровней должна использоваться и центральная точка (рис. 8).

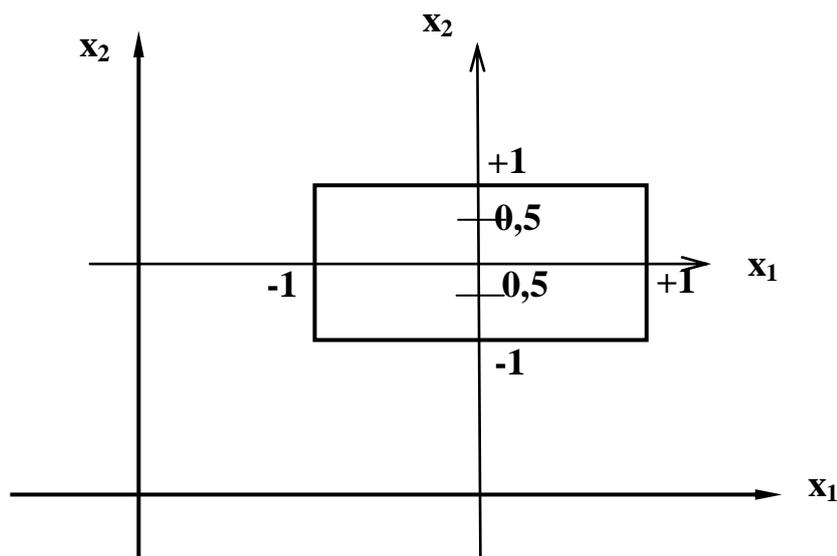


Рисунок 8 – Выбор уровней варьирования при ортогональном планировании

Ортогональность является одним из наиболее важных свойств матрицы. Ортогональность матрицы позволяет оценить все коэффициенты уравнения регрессии независимо друг от друга. Если тот или иной коэффициент регрессии окажется незначимым, то его можно не учитывать, не пересчитывая остальных. План 2^n может являться **насыщенным** при выборе числа членов уравнения $m + 1 = N$, **ненасыщенным** при выборе числа членов уравнения i , соответственно, числа столбцов плана $m + 1 < N$.

План 2^n является также **рототабельным**, так как все точки плана лежат на окружности (сфере, гиперсфере) с радиусом $2^{1/2}$ относительно центра плана.

5.4 Проверка воспроизводимости опытов

Значимость результатов наблюдений каждого опыта определяем с помощью критерия Стьюдента [7, 8] при 5% уровне значимости:

$$\frac{Y_q - \bar{Y}}{S^2_i} \leq t. \quad (22)$$

Величина табличного критерия Стьюдента $t_1(0,05;1) = 12,71$ для данного плана [7, 8].

Если величина критерия Стьюдента меньше табличного критерия, то все полученные результаты значимы.

Проверку однородности дисперсий опытов при одинаковом числе дублированных наблюдений на каждом сочетании уровней факторов, **т. е. воспроизводимость опытов**, проводим по критерию Кохрена при 5% уровне значимости [7, 8]:

$$G = \left(\frac{S_{u \max}}{\sum_{u=1}^m S^2_u} \right) \leq G_{(0,05; f_m; f_u)}, \quad (23)$$

где S^2_u – дисперсия, характеризующая рассеивание результатов опытов на каждом u – сочетании уровней факторов;

$S_{u \max}$ – наибольшая из дисперсий в строчных планах;

$G_{(0,05; f_m; f_u)}$ – табличное значение критерия Кохрена, для

$Y \quad G_{(0,05; 15; 3)} = 0,3733$.

Расчетное значение, рассчитанное по формуле для исследуемых факторов, равно $G = 0,246$. Так как расчетный коэффициент критерия Кохрена меньше табличного, то считаем, что процессы воспроизводимы.

Средневзвешенная дисперсия будет равна:

$$S^2_y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S^2_i, \quad (24)$$

где S^2_i – рассчитываем по формуле (25);

m – число серий опытов, $m = 15$.

$$S^2_i = \frac{\sum_{q=1}^n (Y_q - \bar{Y})^2}{n-1}, \quad (25)$$

где Y_q – результат отдельного наблюдения,

\bar{Y} – среднеарифметическое опыта из нескольких наблюдений,

n – количество наблюдений.

5.5 Расчет коэффициентов регрессии

Расчет коэффициентов регрессии производится по формуле:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{\mathbf{u}=1}^N \mathbf{x}_{iu} \mathbf{y}_u}{\sum_{\mathbf{u}=1}^N \mathbf{x}_{iu}^2}, \quad (26)$$

где i – номер столбца в матрице планирования.

После чего выполняем оценку значимости коэффициентов регрессии.

5.6 Оценка значимости коэффициентов регрессии

Оценка значимости коэффициентов регрессии производится по критерию Стьюдента [7, 8]. Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина не меньше доверительного интервала, т. е.:

$$|\mathbf{b}_i| \geq \Delta \mathbf{b}_i, \quad (27)$$

где $\Delta \mathbf{b}_i$ – доверительный интервал, который определяется по формуле:

$$\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{t}(\alpha, \mathbf{f}_y) \mathbf{S}(\mathbf{b}_i), \quad (28)$$

где $\mathbf{t}(\alpha, \mathbf{f}_y)$ – табличное значение критерия Стьюдента, $\mathbf{t} = 2.13$;

α – уровень значимости ($\alpha = 0.05$);

\mathbf{f}_y – число степеней свободы при определении дисперсии опыта – $\mathbf{S}^2(\mathbf{y})$;

$\mathbf{S}(\mathbf{b}_i)$ – корень квадратный из дисперсии коэффициента регрессии:

$$\mathbf{S}(\mathbf{b}_i) = \sqrt{\mathbf{S}^2(\mathbf{b}_i)}. \quad (29)$$

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формуле:

$$\mathbf{S}^2(\mathbf{b}_i) = \frac{\mathbf{S}^2(\mathbf{y})}{\mathbf{m} \sum_{\mathbf{u}=1}^N \mathbf{x}_{iu}^2}, \quad (30)$$

где $S^2(y)$ – дисперсия опыта.

Дисперсия опыта определяется по формуле:

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2, \quad (31)$$

Все результаты заносятся в таблицу. Если коэффициент получился незначимым, то он исключается из модели, то есть приравнивается к нулю.

5.7 Проверка адекватности полученной модели

Адекватность построенной математической модели исследуемому объекту проверяется по критерию Фишера по формуле:

$$F = \frac{S_{ад}^2(y)}{S^2(y)}, \quad (32)$$

где $S^2(y)$ – дисперсия опыта;

$S_{ад}^2(y)$ – дисперсия адекватности, которая определяется по формуле:

$$S_{ад}^2(y) = \frac{m}{N-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2, \quad (33)$$

где l – число значимых коэффициентов регрессии;

N – число опытов;

y_u – расчетное значение отклика по модели;

\bar{y}_u – среднее значение отклика из N параллельных опытов.

Вычисленная статистика F сравнивается с табличным значением критерия Фишера – $F(\alpha, f_{ад}, f_y)$, где α – уровень значимости ($\alpha = 0.05$);

$f_{ад} = N - l$ – число степеней свободы дисперсии адекватности.

Если модель не адекватна, то необходимо перейти к более сложной модели, после чего перейти к натуральным факторам.

ТЕСТЫ

1 Что такое интервал варьирования фактора?

а) максимальные и минимальные границы допустимых значений фактора из области вещественных числовых значений;

б) число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень фактора, а вычитание – нижний;

в) область допустимых значений действительных чисел факторного пространства.

2 Что такое рандомизация?

а) случайный порядок реализации опытов, т. е. случайный порядок реализации строк матрицы плана исследований;

б) выбор случайных числовых значений для определения действительных чисел факторного пространства;

в) строгий порядок проведения опытов в соответствии с рангом убывания параметров фактора.

3 Что такое ортогональность плана?

а) если скалярное произведение двух векторов $x_i x_j$ равняется нулю, значит, что векторы ортогональны, а так как любое скалярное произведение двух различных столбцов матрицы должно быть равно нулю то в таком случае планирование эксперимента называется ортогональным;

б) это значит, что план-матрица позволяет оценить все коэффициенты уравнения регрессии независимо друг от друга, т. е. величина любого коэффициента не зависит от того, какие величины имеют другие коэффициенты;

в) если все точки плана лежат на окружности (сфере, гиперсфере) с радиусом $2^{1/2}$ относительно центра плана.

4 Как проверить значимость воспроизведения результатов наблюдения каждого опыта?

а) по критерию Стьюдента;

б) по критерию Кохрена;

в) в соответствии с дисперсией коэффициентов регрессии.

6 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Математическое моделирование технологии сварочного производства

(с использованием программы Statistica)

Цель практической работы: научиться строить однофакторные регрессионные модели, выбирать среди них оптимальную, оценивать адекватность модели, рассчитывать прогноз.

Задания к практической работе

Исследовать математическую зависимость отклика от фактора при наличии данных эксперимента;

- научиться вычислять среднее значение переменной величины, среднееквадратическое отклонение переменной, размах выборки;
- строить однофакторные регрессионные модели;
- оценивать адекватность модели и выбирать среди них оптимальную;
- построить график и уравнение линейной модели;
- рассчитать прогноз отклика Y по линейной модели;
- построить график и уравнение экспоненциальной модели $y = a * e^{bx}$;
- рассчитать прогноз отклика Y по экспоненциальной модели;
- построить график и уравнение полиномиальной модели;
- рассчитать прогноз отклика Y по полиномиальной модели;
- рассчитать квадраты отклонений выборочных значений от прогнозируемых;
- вычислить сумму квадратов отклонений.

Проанализировать созданные математические модели и выбрать модель, которая наиболее точно характеризует экспериментальную зависимость коэффициента потерь порошковой проволоки от напряжения на дуге.

Пример

Создать математическую модель влияния напряжения на дуге U_d на коэффициент потерь порошковой проволоки $\psi_{п}$.

Принятые сочетания уровней факторов приведены в таблице 8

Надо отметить, что на коэффициент потерь порошковой проволоки влияет не один фактор – напряжения на дуге, а несколько таких, как сварочный ток, вылет электрода, химический состав порошковой проволоки и другие, но для обучения работы в программе **Statistica** и выполнения задания в настоящем пособии использованы не все факторы и отклики экспериментов.

Для выполнения задания необходимо:

- 1 Создать таблицу данных.
- 2 Вычислить среднее значение, среднеквадратическое отклонение, размах выборки результатов эксперимента.
- 3 С помощью программы построить график и уравнение линейной регрессии $y = b_0 + b_1 x$.
- 4 Рассчитать прогноз отклика Y по линейной модели.
- 5 Найти график и уравнение экспоненциальной модели $y = a * e^{bx}$.
- 6 Рассчитать прогноз отклика Y по экспоненциальной модели.
- 7 Найти график и уравнение полиномиальной модели.
- 8 Рассчитать прогноз отклика Y по полиномиальной модели.
- 9 Рассчитать квадраты отклонений выборочных значений от прогнозируемых.
- 10 Вычислить сумму квадратов отклонений.
- 11 Выбрать модель по сумме квадратов отклонений.
- 12 Проверить линейную модель на адекватность.

Таблица 8 – Условия и результаты эксперимента

	Фактор X (U_д), В	Отклик Y (ψ_п), %
1	21	27,32
2	22	26,84
3	28	30,83
4	27	30,13
5	23	22,93
6	21	28,95
7	30	40,84
8	29	33,49
9	26	25,92
10	25	25,14

6.1 Создаем таблицу данных. Для создания таблицы данных необходимо выбрать пункт меню **File – New Data** (Файл, новые данные) в программе **Statistica**. В столбцах таблицы расположены переменные **Vars**, в строках таблицы – случаи **Cases** (рис. 10). Для введения данных в таблицу необходимо дважды щелкнуть по окну , ввести обозначение **U_д**, а в окно  ввести обозначение **ψ_п**. В соответствующие строки таблицы ввести данные (пример 1) и сохранить таблицу (**например: pr.1.sta**). На рисунке 11 приведена заполненная электронная таблица данных. Определяем переменные: кнопка **Variables**, в качестве переменных (**x, y**) записываем заданные переменные (**U_д, ψ_п**), **Ok**.

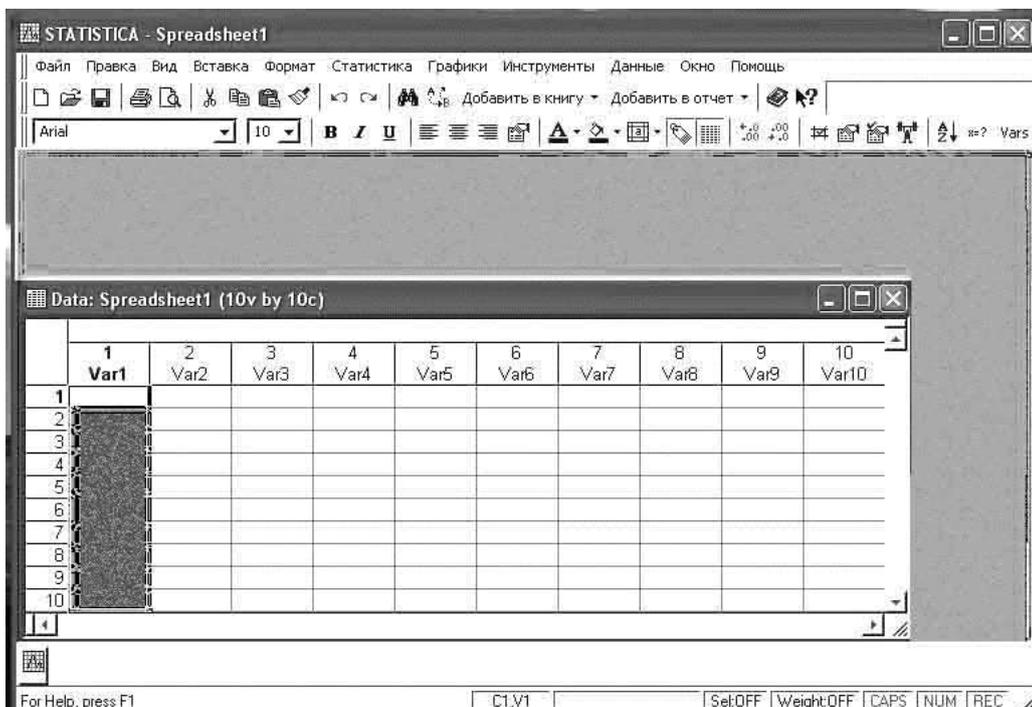


Рисунок 10 – Пустая электронная таблица данных

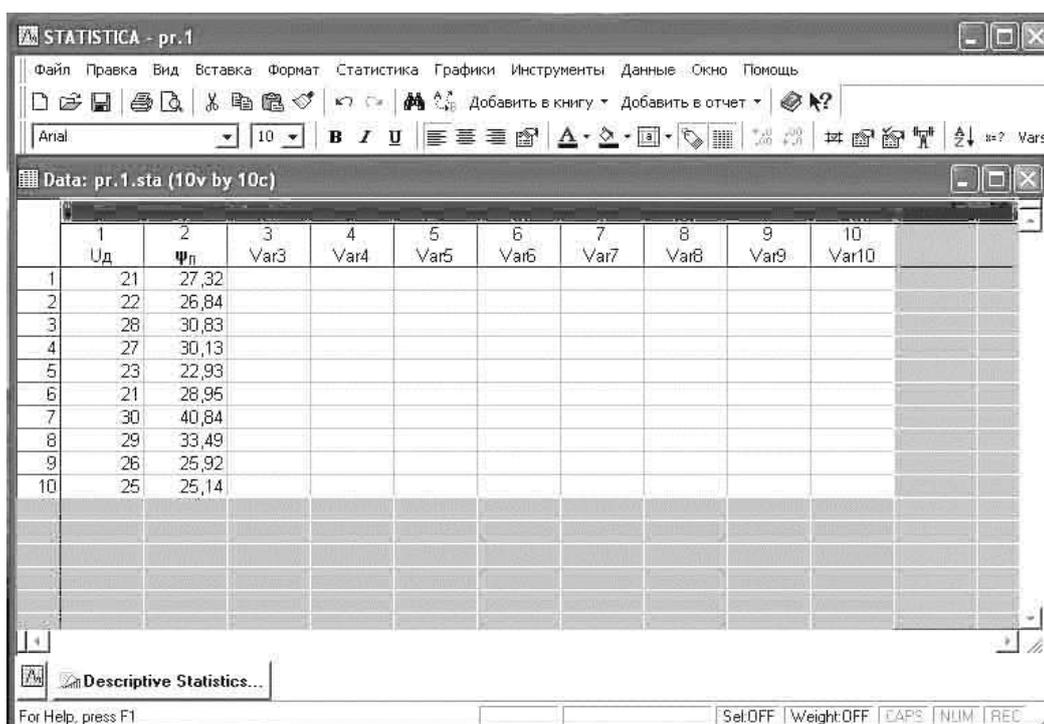


Рисунок 11 – Заполненная электронная таблица данных

6.2 Вычисляем среднее значение, среднееквадратическое отклонение, размах выборки результатов эксперимента. Для выполнения вычислений активизируем заполненную электронную таблицу данных **Statistics – Basic Statistics/Tables** (Основные статистические характеристики и таблицы) и открываем вкладку **Advanced** (Расширенные) (рис. 12). Активируем опции: **Valid N** (Объем выборки), **Mean** (Среднее значение), **Standard Deviation** (Среднееквадратическое отклонение), **Minimum** и **Max-**

6.3 Строим график и находим уравнение линейной регрессии $y = b_0 + b_1x$. Активируем таблицу с данными. **Prob. & Scatterplots** (Предполагаемые точечные графики) – вкладка **Advanced**. Определяем переменные: кнопка **Variables (1- Уд, 2- ψ_{II})**, **Ок**. Выбираем данные, какие из переменных на графике будут по горизонтали (**Уд**), другие переменные – по вертикали (**ψ_{II}**). Выбираем опции графика **2-D Scatterplots** (Двухмерный точечный).

Над графиком написано уравнение математической модели линейной регрессии – зависимость коэффициента потерь порошковой проволоки от напряжения на дуге (рис. 14): $\psi_{II} = 2,1940 + 1,0732 * \text{Уд}$, **Correlation: $r = ,70149$** (коэффициент корреляции).

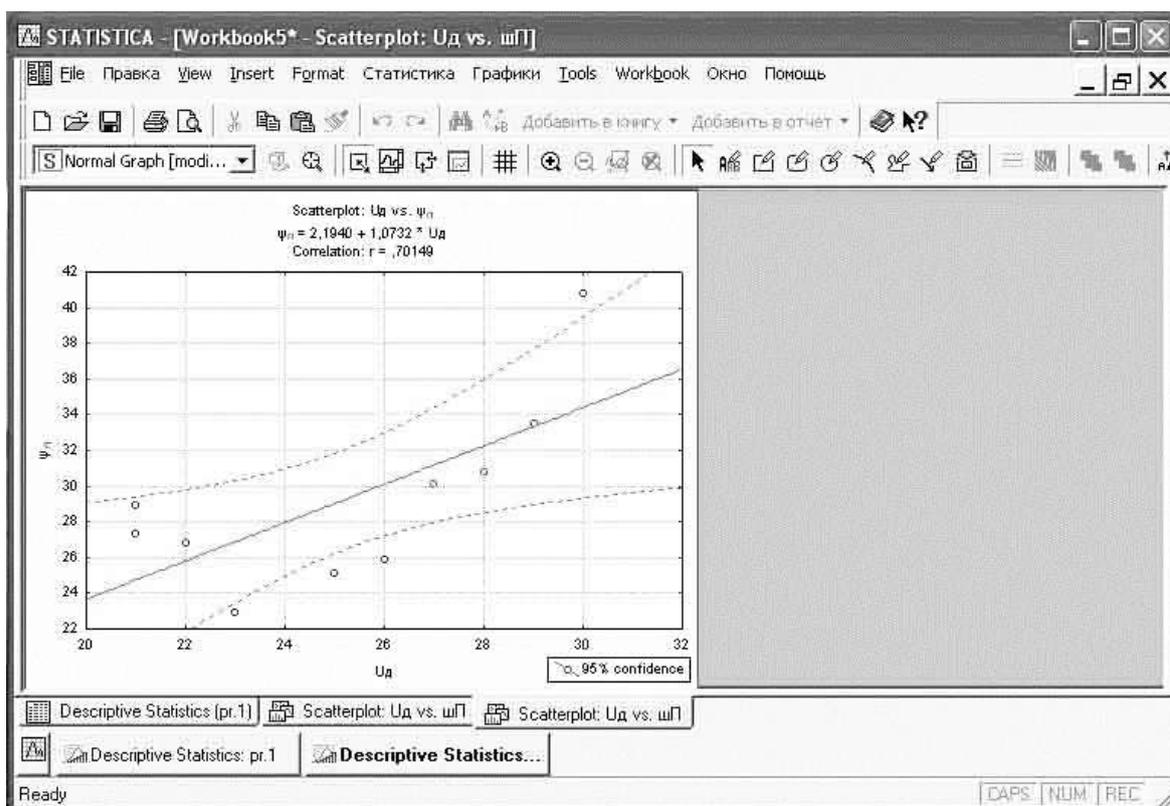


Рисунок 14 – График и уравнение математической модели

6.4 Рассчитываем прогноз отклика Y (ψ_{II}) по линейной модели.

Используя полученную формулу, можно рассчитать значения ψ_{II} (в любой точке из области прогнозов). Добавим 3-й столбец к таблице 8 (ψ_{II_L}). Двойным щелчком мыши по имени столбца входим в окно редактирования столбца.

В окне **Long Name** (Длинное имя) внизу диалогового окна запишем формулу $= 2,1940 + 1,0732 * \text{Уд}$ (уравнение регрессии) и нажмем **ОК**. В столбце ψ_{II_L} появятся значения отклика, рассчитанные по уравнению линейной регрессии для всех факторов **Уд** (табл. 8). Полученные значения приведены на рисунке 15.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
	Уд	Ψп	Ψп Л	Var4	Var5	Var6	Var7	Var8	Var9	Var10				
1	21	27,32	24,7312											
2	22	26,84	25,8044											
3	28	30,83	32,2436											
4	27	30,13	31,1704											
5	23	22,93	26,8776											
6	21	28,95	24,7312											
7	30	40,84	34,39											
8	29	33,49	33,3168											
9	26	25,92	30,0972											
10	25	25,14	29,024											

Рисунок 15 – Прогнозируемые значения отклика, рассчитанные согласно уравнению линейной регрессии

6.5 Находим график и уравнение экспоненциальной модели $y = a * e^{bx}$. В пункте меню программы **Statistica – Графики** выбираем вид графика **Exponential** (Экспоненциальный), вводим те же исходные данные (п. 6.3) и получаем график и функцию экспоненциальной модели $\Psi_{п} = 12,2423 * \exp(0,0341 * Уд)$ (рис. 16).

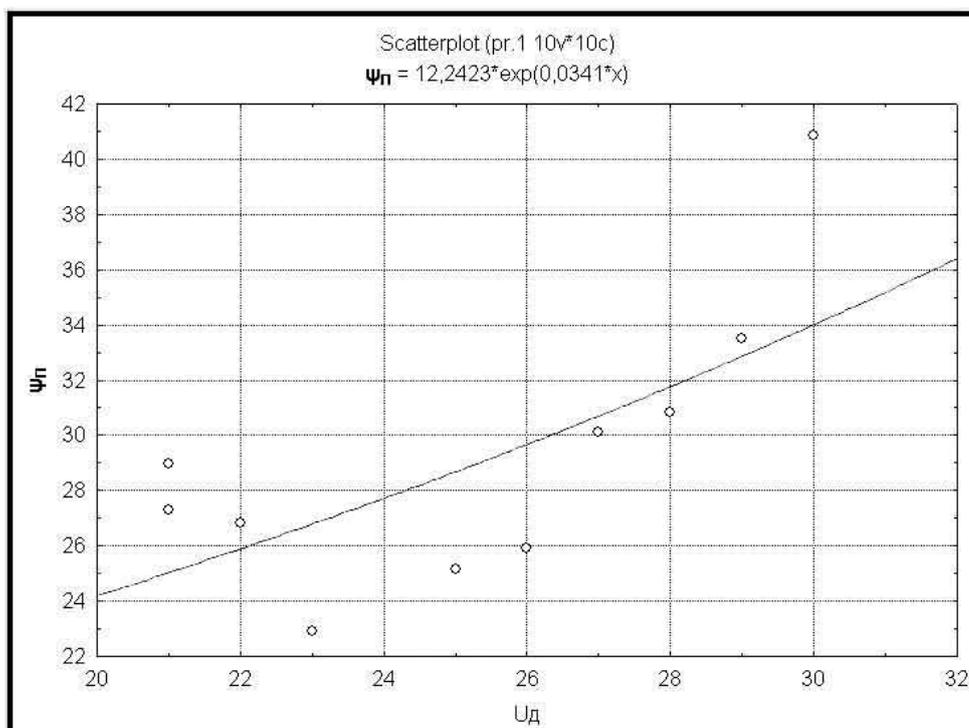


Рисунок 16 – График и уравнение экспоненциальной математической модели

6.6 Рассчитываем прогноз отклика Y (Ψ_{II}) по экспоненциальной модели. Используя полученную формулу, можно рассчитать значения Ψ_{II} (в любой точке из области прогнозов).

Добавим 4-й столбец к таблице 8 (Ψ_{II_EXP}). Двойным щелчком мыши по имени столбца входим в окно редактирования столбца.

В окне **Long Name** (Длинное имя) внизу диалогового окна запишем формулу $= 12,2423 * \exp(0,0341 * U_d)$ (уравнение регрессии) и нажмем **ОК**. В столбце Ψ_{II_EXP} появятся значения отклика (рис. 17), рассчитанные по уравнению экспоненциальной регрессии для всех факторов U_d (табл. 8).

	1 U_d	2 Ψ_{II}	3 Ψ_{II_L}	4 Ψ_{II_EXP}	5 Var5	6 Var6	7 Var7	8 Var8	9 Var9	10 Var10
1	21	27,32	24,7312	25,05309						
2	22	26,84	25,8044	25,92213						
3	28	30,83	32,2436	31,80734						
4	27	30,13	31,1704	30,741						
5	23	22,93	26,8776	26,82132						
6	21	28,95	24,7312	25,05309						
7	30	40,84	34,39	34,05229						
8	29	33,49	33,3168	32,91068						
9	26	25,92	30,0972	29,7104						
10	25	25,14	29,024	28,71435						

Рисунок 17 – Прогнозируемые значения отклика, рассчитанные согласно уравнению экспоненциальной регрессии

6.7 Находим график и уравнение полиномиальной модели.

В пункте меню программы **Statistica** выбираем вкладку **Графики** и задаем вид графика (рис. 18) **Polynomial** (Полиномиальный), вводим исходные данные (п. 6.3) и получаем построенный график и функцию полиномиальной модели (рис. 19):

$$\Psi_{II} = 271,3788 - 20,6214 * U_d + 0,4303 * U_d^2.$$

6.8 Рассчитываем прогноз отклика Y (Ψ_{II}) по полиномиальной модели. Используя полученную формулу, можно рассчитать значения Ψ_{II} в любой точке из области прогнозов. Добавим 5-й столбец Ψ_{II_POL} к таблице 8. Двойным щелчком мыши по имени столбца входим в окно редактирования столбца. В окне **Long Name** (Длинное имя) внизу диалогового окна запишем формулу $= 271,3788 - 20,6214 * U_d + 0,4303 * U_d^2$

(уравнение регрессии) и нажмем **ОК**. В столбце Ψ_{II} **POL** появятся значения отклика (рис. 20), рассчитанные по уравнению экспоненциальной регрессии для всех факторов **Уд** (табл. 8).

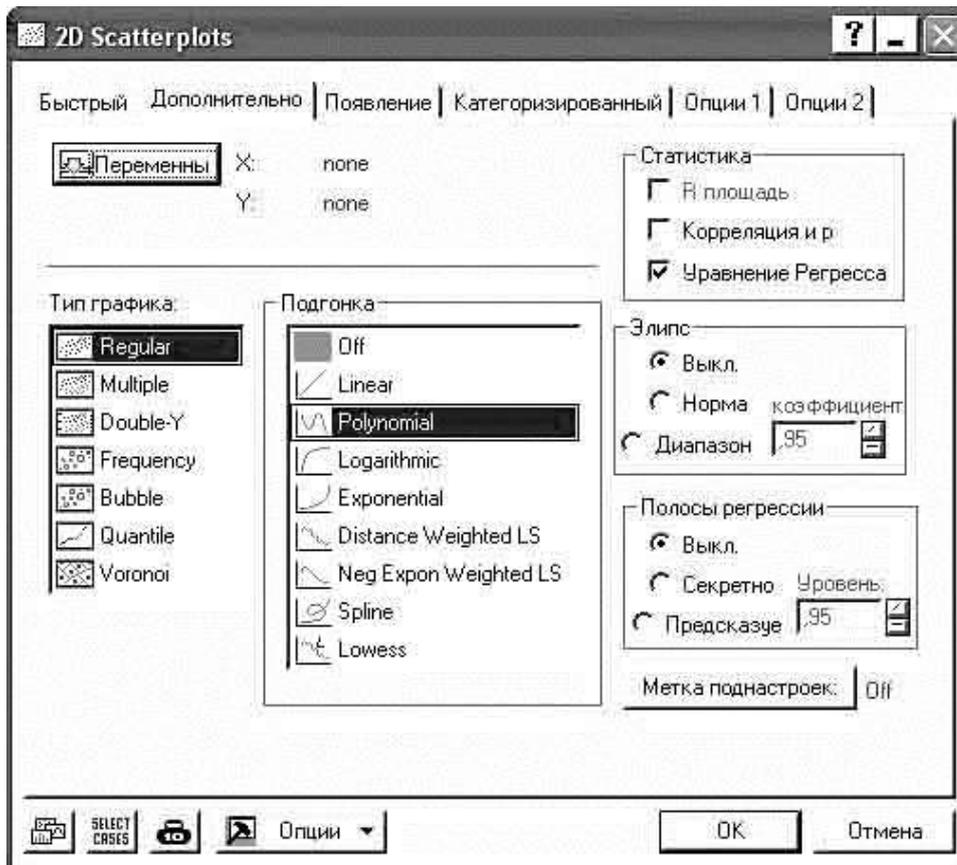


Рисунок 18 – Вкладка программы для выбора вида графика *Polynomial* (Полиномиальный)

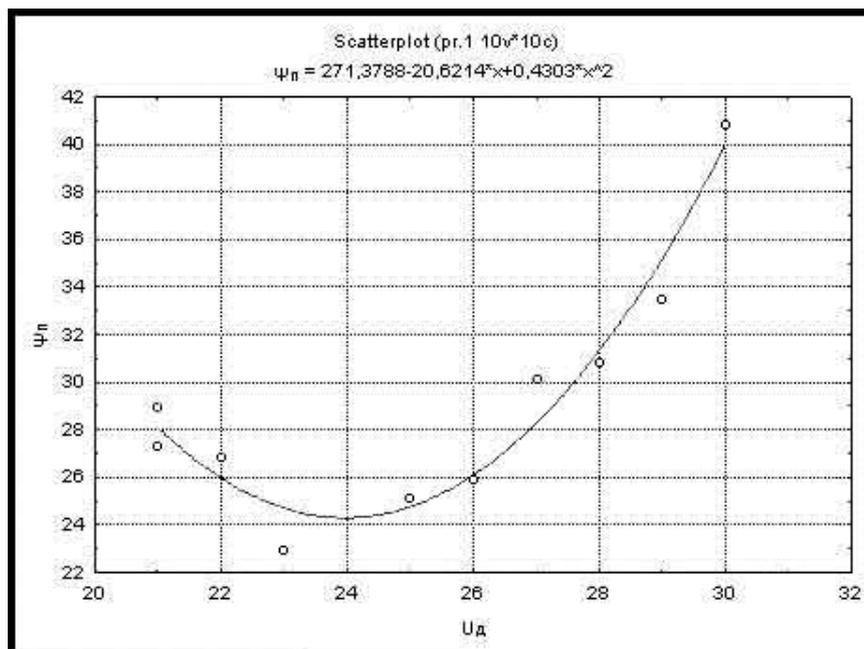


Рисунок 19 – График и функция полиномиальной модели

	1 Уд	2 Ψп	3 Ψп_L	4 Ψп_EXP	5 Ψп_PDL	6 Var6	7 Var7	8 Var8	9 Var9	10 Var10
1	21	27,32	24,7312	25,05309	28,0917					
2	22	26,84	25,8044	25,92213	25,9732					
3	28	30,83	32,2436	31,80734	31,3348					
4	27	30,13	31,1704	30,741	28,2897					
5	23	22,93	26,8776	26,82132	24,7153					
6	21	28,95	24,7312	25,05309	28,0917					
7	30	40,84	34,39	34,05229	40,0068					
8	29	33,49	33,3168	32,91068	35,2405					
9	26	25,92	30,0972	29,7104	26,1052					
10	25	25,14	29,024	28,71435	24,7813					

Рисунок 20 – Прогнозируемые значения отклика, рассчитанные согласно уравнению полиномиальной регрессии

6.9 Рассчитываем квадраты отклонений выборочных значений от прогнозируемых. Необходимо добавить столбец **kv_1** к таблице 8 (квадрат отклонений прогнозируемого отклика для линейной модели $\Psi_{п_L}$) и в окне **Long Name** (Длинное имя) редактируемого столбца внизу диалогового окна записываем формулу $= (\Psi_{п} - \Psi_{п_L})^2$ и нажимаем **ОК** для выполнения вычисления. На рисунке 21 приведена таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для линейной модели.

	1 Уд	2 Ψп	3 Ψп_L	4 Ψп_EXP	5 Ψп_PDL	6 kv_L	7 Var7	8 Var8	9 Var9	10 Var10
1	21	27,32	24,7312	25,05309	28,0917	6,701885				
2	22	26,84	25,8044	25,92213	25,9732	1,072467				
3	28	30,83	32,2436	31,80734	31,3348	1,998265				
4	27	30,13	31,1704	30,741	28,2897	1,082432				
5	23	22,93	26,8776	26,82132	24,7153	15,58355				
6	21	28,95	24,7312	25,05309	28,0917	17,79827				
7	30	40,84	34,39	34,05229	40,0068	41,6025				
8	29	33,49	33,3168	32,91068	35,2405	0,029998				
9	26	25,92	30,0972	29,7104	26,1052	17,449				
10	25	25,14	29,024	28,71435	24,7813	15,08546				

Рисунок 21 – Таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для линейной модели

Добавляем столбец **kv_EXP** к таблице 8 (квадрат отклонений прогнозируемого отклика для экспоненциальной модели модели $\Psi_{П_EXP}$) и в окне **Long Name** (Длинное имя) редактируемого столбца внизу диалогового окна записываем формулу $= (\Psi_{П} - \Psi_{П_EXP})^2$ и нажимаем **ОК** для выполнения вычисления. На рисунке 22 приведена таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для экспоненциальной модели.

	1 Уд	2 Ψп	3 Ψп_L	4 Ψп_EXP	5 Ψп_POL	6 Kv_L	7 Kv_EXP	8 Var8	9 Var9	10 Var10
1	21	27,32	24,7312	25,05309	28,0917	6,701885	5,138882			
2	22	26,84	25,8044	25,92213	25,9732	1,072467	0,842479			
3	28	30,83	32,2436	31,80734	31,3348	1,998265	0,955199			
4	27	30,13	31,1704	30,741	28,2897	1,082432	0,373317			
5	23	22,93	26,8776	26,82132	24,7153	15,58355	15,14239			
6	21	28,95	24,7312	25,05309	28,0917	17,79827	15,18591			
7	30	40,84	34,39	34,05229	40,0068	41,6025	46,07306			
8	29	33,49	33,3168	32,91068	35,2405	0,029998	0,335614			
9	26	25,92	30,0972	29,7104	26,1052	17,449	14,36714			
10	25	25,14	29,024	28,71435	24,7813	15,08546	12,77601			

Рисунок 22 – Таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для экспоненциальной модели

Добавляем столбец **kv_POL** к таблице 8 (квадрат отклонений прогнозируемого отклика для полиномиальной модели $\Psi_{П_POL}$) и в окне **Long Name** (Длинное имя) редактируемого столбца внизу диалогового окна записываем формулу $= (\Psi_{П} - \Psi_{П_POL})^2$ и нажимаем **ОК** для выполнения вычисления. На рисунке 23 приведена таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для полиномиальной модели.

6.10 Вычисляем сумму квадратов отклонений для математических моделей. В программе **Statistics** выбираем опцию **Basic Statistics / Tables** (Основные статистические характеристики и таблицы), вкладка **Advanced**.

Определяем переменные: кнопка **Variables** (**kv_l**, **kv_exp**, **kv_pol**), **ОК**. Активируем только одну опцию: **Sum** (Сумма), **Summary**. Суммы квадратов отклонений запишутся в виде таблицы (рис. 24).

6.11 Проанализируем созданные математические модели и выберем модель, которая наиболее точно характеризует экспериментальную зависимость коэффициента потерь порошковой проволоки от напряжения на дуге. Для анализа целесообразно выполнить расчет

прогнозируемых значений отклика, определения области прогнозируемых значений для всех созданных моделей (линейной, экспоненциальной, полиномиальной).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Уд	Ψп	Ψп_L	Ψп_EXP	Ψп_POL	Kv_L	Kv_EXP	Kv_POL	Var9	Var10
1	21	27,32	24,7312	25,05309	28,0917	6,701885	5,138882	0,595521		
2	22	26,84	25,8044	25,92213	25,9732	1,072467	0,842479	0,751319		
3	28	30,83	32,2436	31,80734	31,3348	1,998265	0,955199	0,254829		
4	27	30,13	31,1704	30,741	28,2897	1,082432	0,373317	0,357104		
5	23	22,93	26,8776	26,82132	24,7153	15,58355	15,14239	0,187296		
6	21	28,95	24,7312	25,05309	28,0917	17,79827	15,18591	0,338673		
7	30	40,84	34,39	34,05229	40,0068	41,6025	46,07306	0,694222		
8	29	33,49	33,3168	32,91068	35,2405	0,029998	0,335614	3,06425		
9	26	25,92	30,0972	29,7104	26,1052	17,449	14,36714	0,634239		
10	25	25,14	29,024	28,71435	24,7813	15,08546	12,77601	0,128695		

Рисунок 23 – Таблица данных с рассчитанными квадратами отклонений прогнозируемого отклика для полиномиальной модели

Descriptive Statistics (pr.1)			
Variable	Sum	Minimum	Maximum
Kv_L	118,4038	0,029998	41,60250
Kv_EXP	111,1900	0,335614	46,07306
Kv_POL	12,8338	0,034299	3,38670

Рисунок 24 – Суммы квадратов отклонений

Для выполнения вычислений активизируем заполненную электронную таблицу данных **Statistics – Basic Statistics / Tables (Основные статистические характеристики и таблицы)** и открываем вкладку **Advanced (Продвинутые)** и выполняем расчеты аналогично п. 6.2.

Таблица с рассчитанными показателями приведена на рисунке 25.

7 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Создание математической модели 2-го порядка (с использованием программы Statistica)

Цель практической работы: научиться планировать эксперимент, выполнять статистические расчеты обработки результатов эксперимента, создавать математическую модель 2-го порядка

Задания к практической работе:

- научиться строить план эксперимента,
- научиться анализировать полученные данные,
- определение коэффициентов математической модели,
- выполнить анализ статистической значимости коэффициентов математической модели,
- построить график и уравнение математической модели,
- оценивать адекватность модели,
- проанализировать созданную математическую модель.

Пример

Создать математическую модель влияния напряжения на дуге U_d , температуры предварительного подогрева изделия T_{II} на ширину наплавленного сварочного валика B . Выполнялась наплавка порошковой проволокой диаметром 3 мм. По технологическим соображениям выбрана следующая область исследований:

$$U_d = 21-27 \text{ В}, T_{II} = 50-350^\circ\text{С}.$$

Принятые сочетания уровней факторов приведены в таблице 9.

Таблица 9 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Фактор	Отклик
	$X_1 (U_d), \text{В}$	$X_2 (T_{II}), ^\circ\text{С}$	$Y (B), \text{мм}$
1	21	50	9,02
2	22	80	9,12
3	23	120	10,11
4	24	150	10,13
5	25	200	12,93
6	26	250	14,95
7	27	280	16,12
8	22	300	13,49
9	24	350	15,92
10	26	320	14,14

7.1 Построение плана-матрицы эксперимента. Чаще всего при создании математических моделей технологии сварочного производства применяют центральные композиционные планы (раздел 5).

План-матрицу эксперимента можно набрать «вручную», т. е. заполнить данные в таблицу плана-матрицы эксперимента, а можно воспользоваться программой **Statistica** [9].

В меню **Statistics** выбираем вкладку **Industrial Statistics & Six Sigma** (Индустриальная статистика Сигма шесть) на ней выбираем вкладку **Experimental Design (DOE)** (Экспериментальный проект) (рис. 26). Затем работаем с появившимся окном.

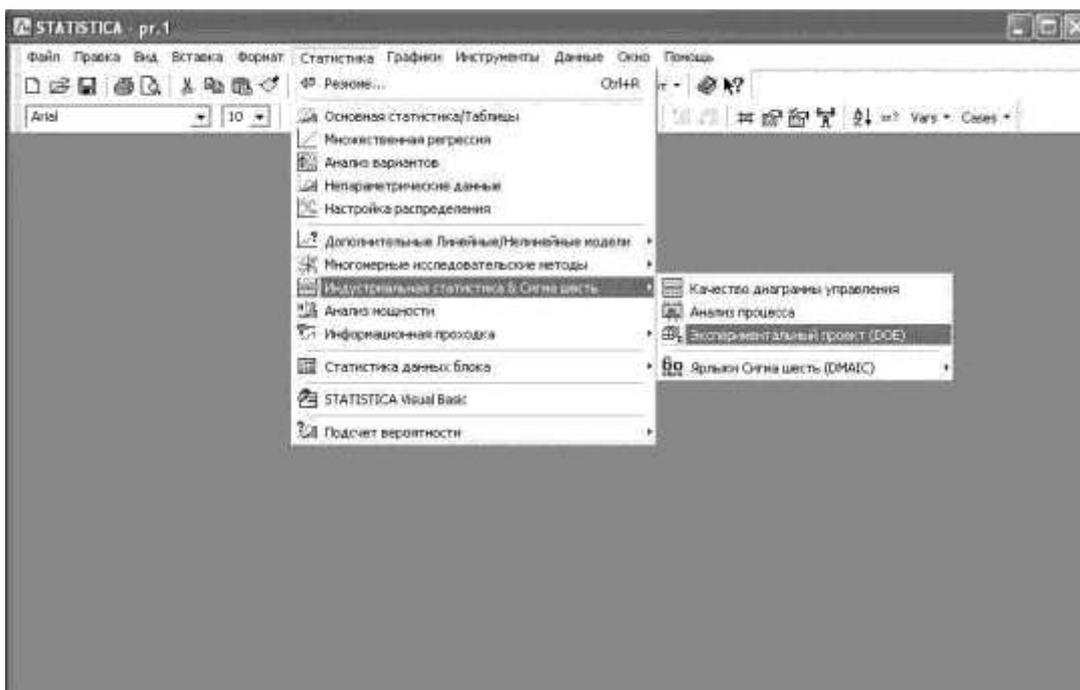


Рисунок 26 – Индустриальная статистика Сигма шесть – экспериментальный проект

В появившемся окне **Design & Analysis of Experiments** выбираем **Central composite, non-factorial, surface designs** (Центральные композиционные планы, планы, нефакториальные, поверхности отклика) (рис. 27).

Откроется окно **Design & Analysis of Central Composite (Response Surface) Experiments** (План и анализ центрального композиционного плана), вкладка **Design experiment** (План эксперимента) (рис. 28).

Выбираем **Standard design** (Проект плана) и строку **2/1/10** в поле **Factors/blocks/runs** (Факторы/блоки/опыты): два фактора, один блок, десять опытов. Программа Статистика может работать с планами, имеющими до 8 факторов. После чего нажимаем кнопку **OK**.

Появится окно **Design of a Central Composite (Response Surface) Experiment** (Центральный композиционный план эксперимента для поверхности отклика) (рис. 29).

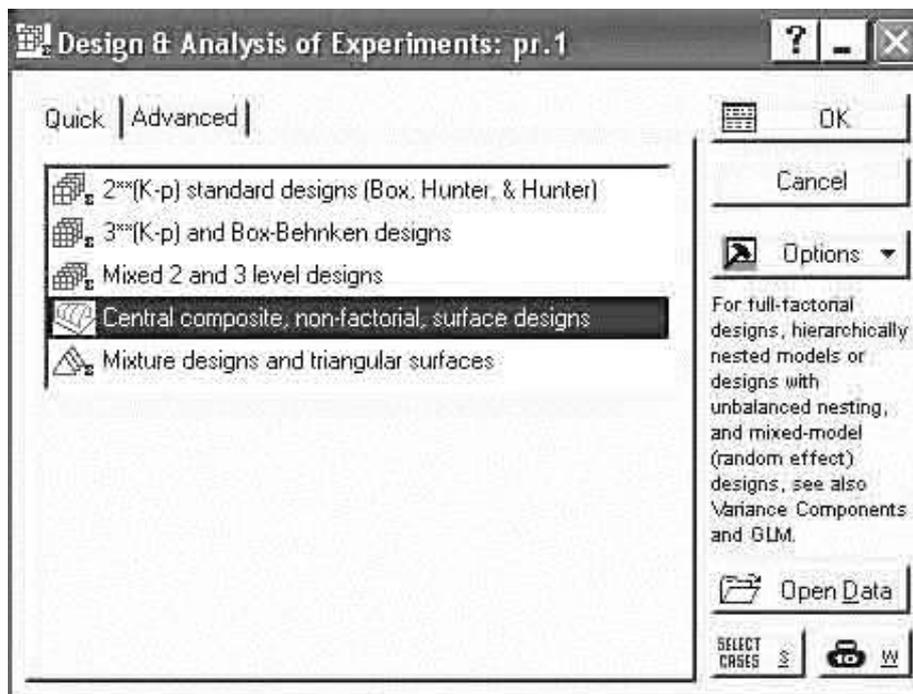


Рисунок 27 – Вкладка центральные композиционные планы

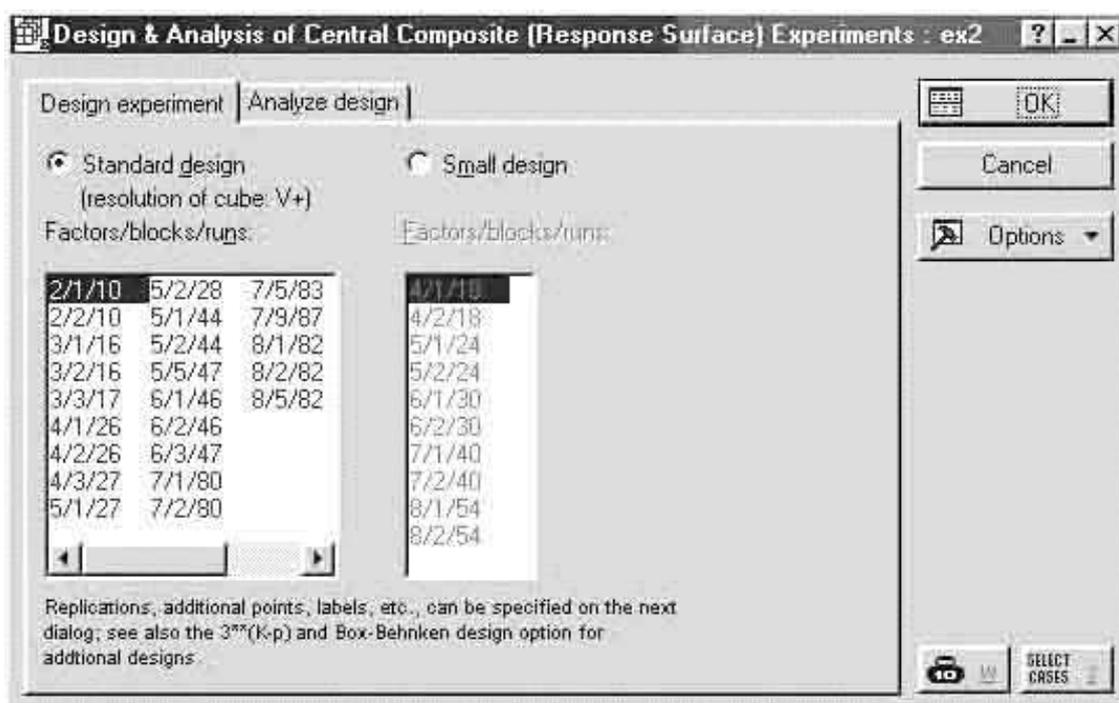


Рисунок 28 – План эксперимента

В поле **Order of runs** (Порядок проведения экспериментов) указываем тип плана: стандартный или рандомизированный (см. раздел 5).

Нажимаем кнопку **Change factor names, values** (Имена факторов, значения) и заполняем таблицу в соответствии с исходными данными в диалоговом окне **Summary for Variables** (Итоги для переменных) так, как показано на рисунке 30, нажимаем кнопку **Ok**.

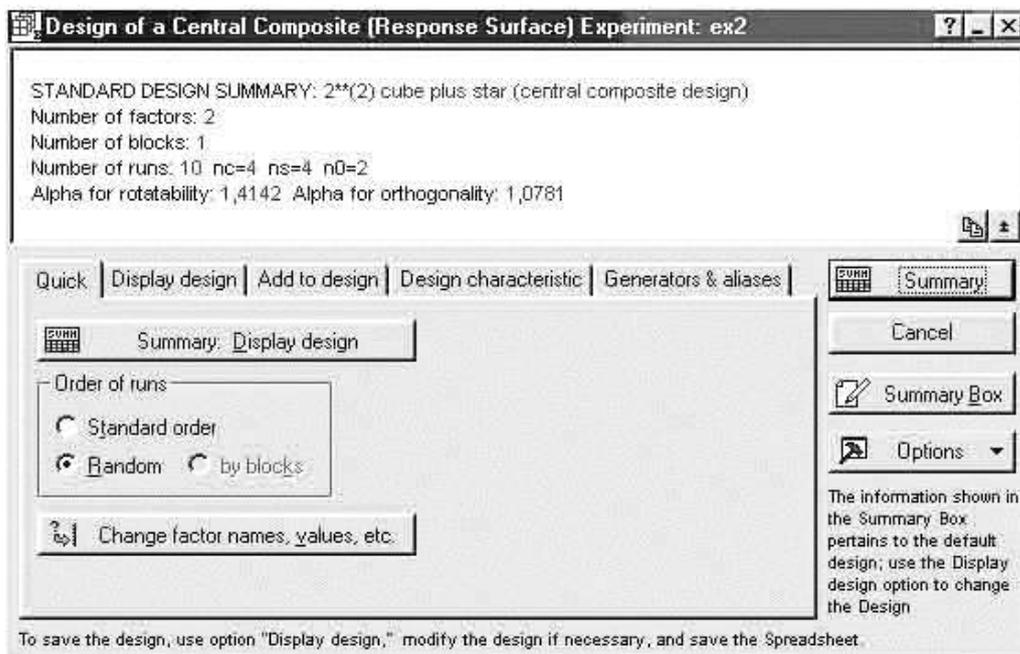


Рисунок 29 – Центральный композиционный план эксперимента для поверхности отклика

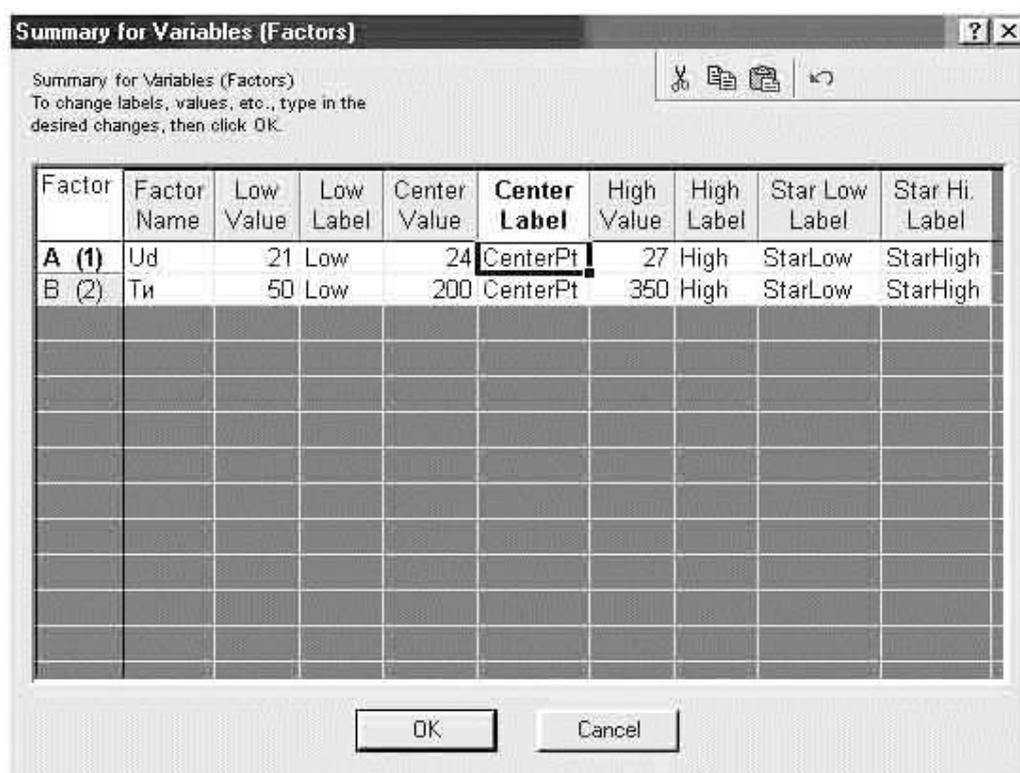


Рисунок 30–Итоги для переменных

Далее выбираем опции для настройки отображения плана так, как показано на (рис. 31, 32).

В окне программы записаны выбранные показатели:

- центральный композиционный план факторного эксперимента – 2^2 ,
- количество факторов – 2,

- количество блоков – 1,
- количество экспериментов – 10,
- коэффициент ротатабельности – 1,4142,
- коэффициент ортогональности – 1,0781
- факторы именные,
- порядок проведения экспериментов рандомизированный,
- показ на графике минимума и максимума.

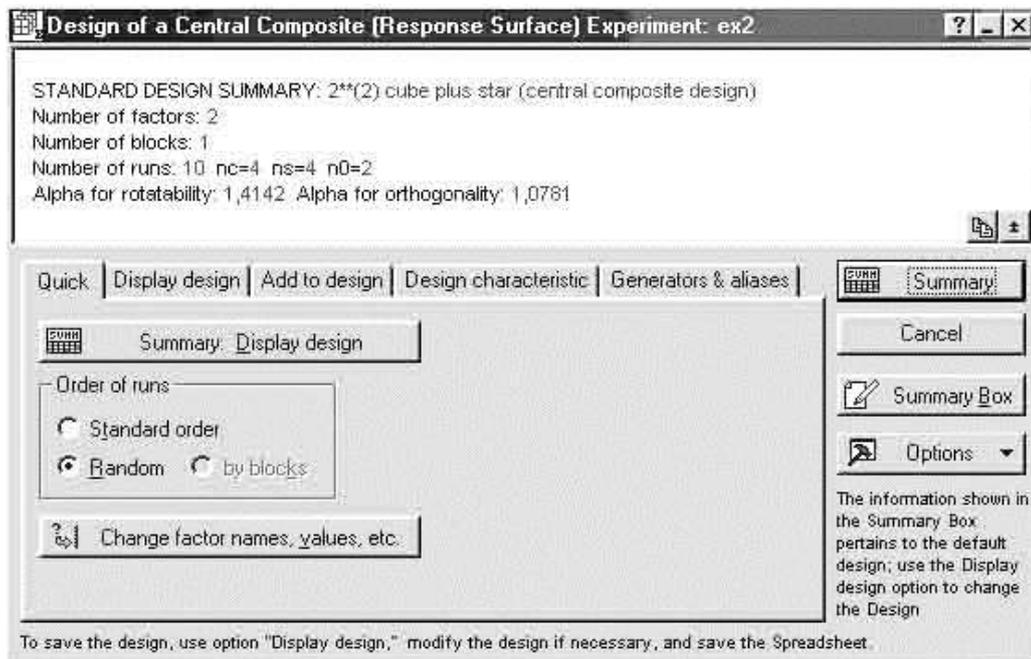


Рисунок 31 – Центральный композиционный план эксперимента для поверхности отклика

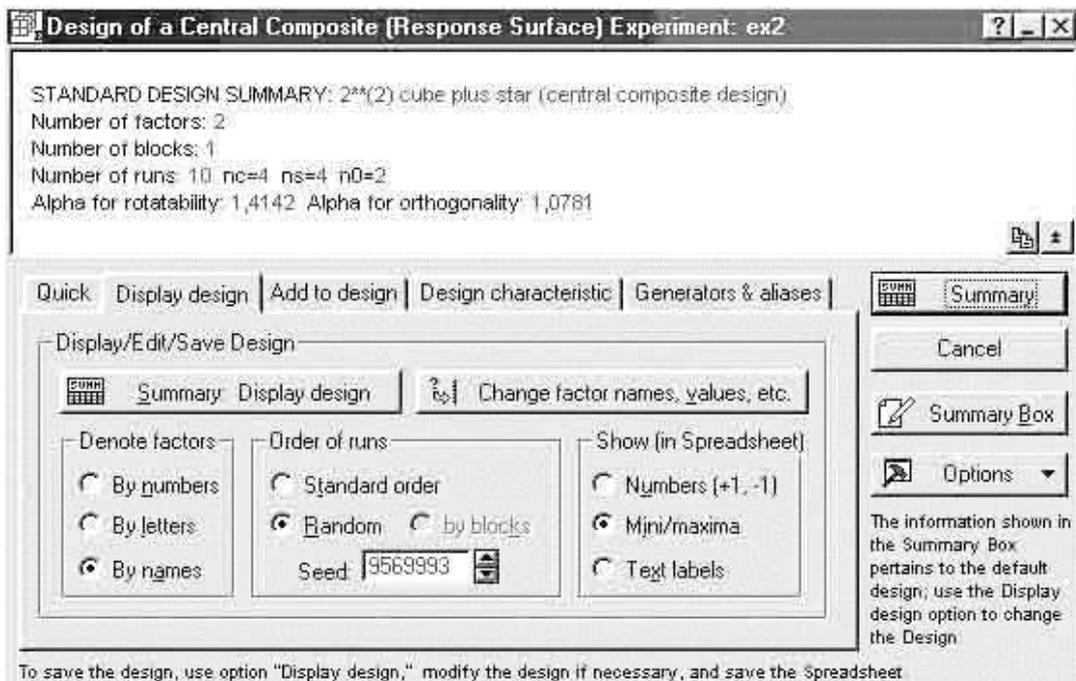


Рисунок 32 – Центральный композиционный план эксперимента для поверхности отклика

На рисунке 32 выбираем вкладку **Design characteristic** (Характеристика плана). Указываем, что вычисляемый план – ортогональный. Нажимаем клавишу **Summary** (Сумма). Получаем план-матрицу эксперимента (рис. 33).

		2**(2) central composite, nc=4 ns=4 n0=2 Runs=10 (факторн_экспер)									
Standard Run	Уд	Ти									
3	27,00000	50,0000									
1	21,00000	50,0000									
7	24,00000	38,2865									
2	21,00000	350,0000									
6	27,23427	200,0000									
4	27,00000	350,0000									
9 (C)	24,00000	200,0000									
5	20,76573	200,0000									
8	24,00000	361,7135									
10 (C)	24,00000	200,0000									

Рисунок 33 – План-матрица эксперимента

В построенной таблице показан порядок сбора экспериментальных данных. По предложенному плану был организован эксперимент. Перенесем данные в таблицу данных (**Data**) и добавим значения, полученные в результате эксперимента (рис. 34). В столбце **В** таблицы **факторн_экспер** (данные) появятся данные, полученные в результате проведения натурального эксперимента. После чего необходимо переходить к математическому анализу проведенного эксперимента.

Data: факторн_экспер(данные)* (10v by 10c)										
	1 Уд	2 Ти	3 В	4 Var4	5 Var5	6 Var6	7 Var7	8 Var8	9 Var9	10 Var10
1	27,00000	50,0000	10,8							
2	21,00000	50,0000	9,12							
3	24,00000	38,2865	9,3							
4	21,00000	350,0000	11,32							
5	27,23427	200,0000	12,93							
6	27,00000	350,0000	16,28							
7	24,00000	200,0000	12,21							
8	20,76573	200,0000	11,85							
9	24,00000	361,7135	16,88							
10	24,00000	200,0000	12,14							

Рисунок 34 – Таблица данных с результатами эксперимента

7.2 Анализ результатов эксперимента. В диалоговом окне **План эксперимента** нажмем кнопку **Cancel**. Вернемся в окно **Центральные композиционные планы** (рис. 28). Выберем вторую вкладку – **Analyze design** (Анализ плана) (рис. 35).

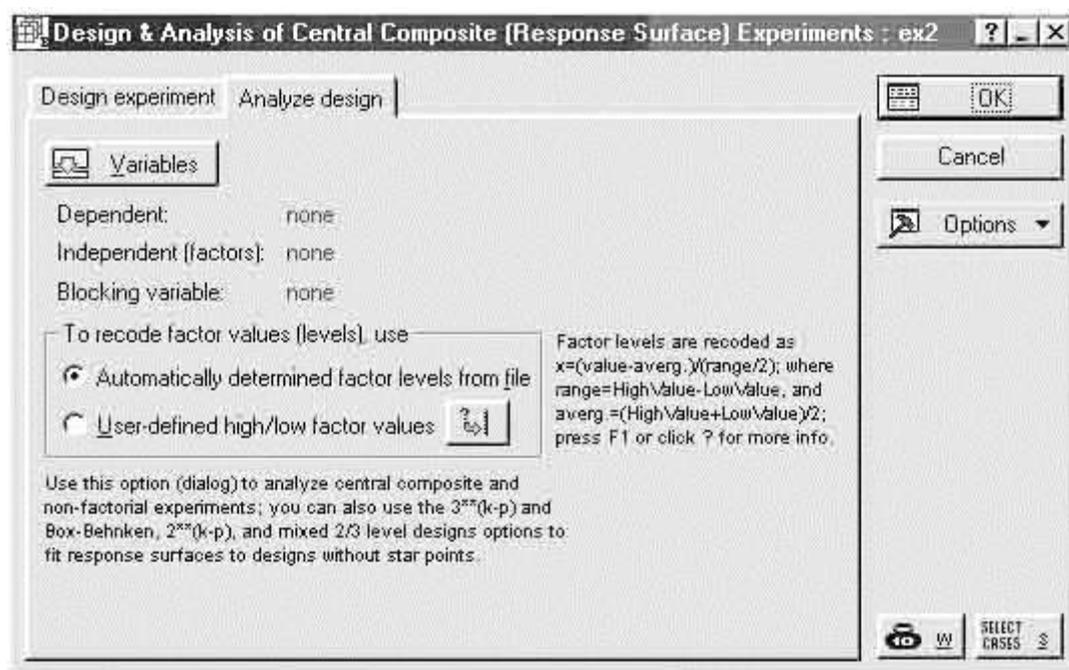


Рисунок 35 – Анализ плана

Нажимаем кнопку **Variables** (Переменные). Указываем в качестве зависимой (**Dependent**) переменной – **В**, в качестве независимых (**Independent factors**) переменных – **Ud, Ти**, нажимаем клавишу **Ok** (рис. 36).

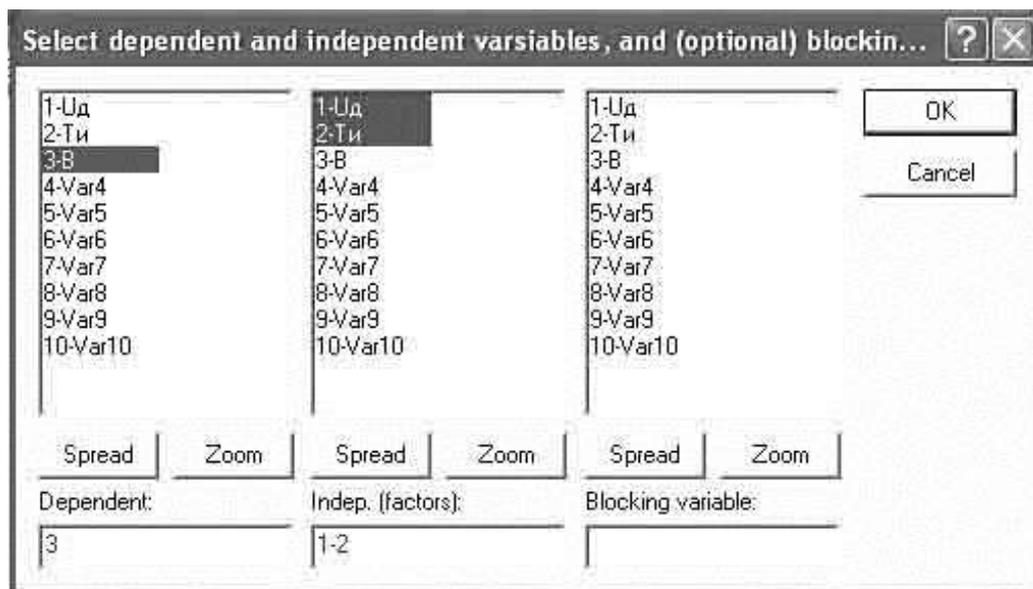


Рисунок 36 – Ввод переменных

В поле **To recode factor values use** (Для перекодирования использовать) оставим принятое по умолчанию положение **Automatically determined factor level from file** (Автоматическое определение уровней факторов из файла данных), нажимаем клавишу **Ok**.

На экране появится окно системы **Statistica** для анализа центрального композиционного эксперимента (рис. 37), которое содержит 9 вкладок.

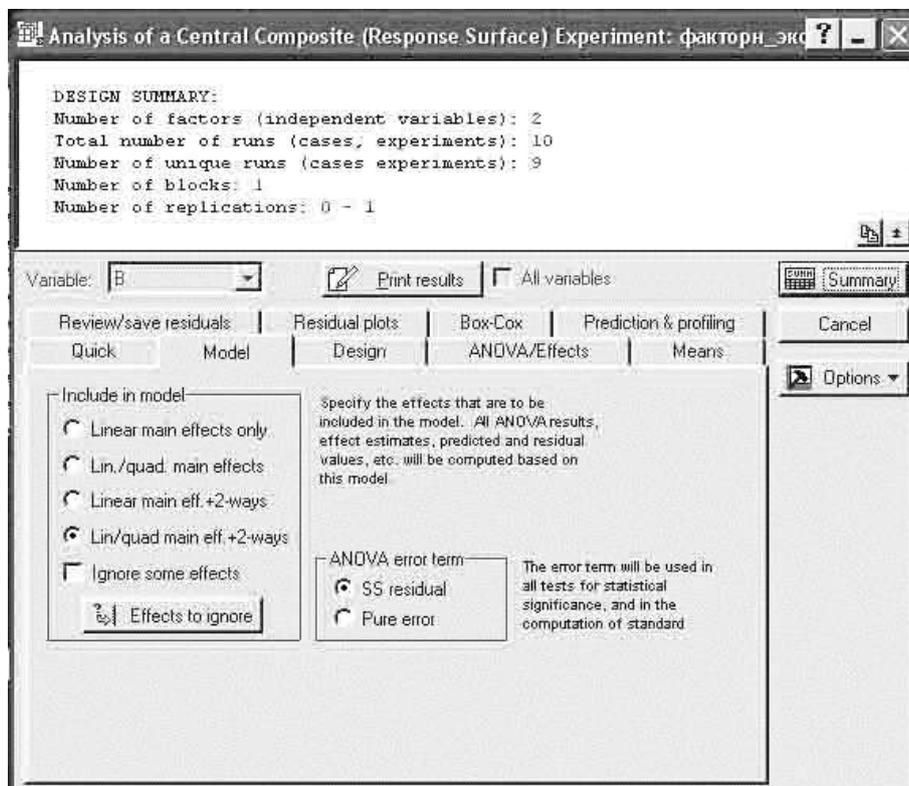


Рисунок 37–Анализ эксперимента, вкладка - модель

На вкладке **Model** (Модель) выбираем опцию **Lin / quad main eff / +2-ways** (Главные линейные/ квадратичные эффекты и 2 взаимодействия) и опцию **SS Residual** (Остаточная сумма квадратов). Переходим на вкладку **ANOVA / Effects** (Эффекты), нажимаем кнопку **ANOVA table** (Таблицы) (рис. 38). Результат получим в виде таблицы (рис. 39). Из этой таблицы следует, что статистически значимые эффекты (уровень $p < 0,05$) имеет один линейный член (**2) Tи L**. Здесь же дана величина достоверности аппроксимации (**R-sqr = 0,88847**) – общее качество модели хорошее.

При заполнении вкладки **ANOVA/Effects** (Эффекты) необходимо установить доверительный интервал. Доверительный интервал устанавливаем на уровне 95% (**Confidence interval**).

Для того чтобы определить, насколько хорошо модель описывает экспериментальные данные, будем использовать тест **lack-of-fit** (потери согласия).

Вернемся к диалоговому окну результатов анализа (рис. 37) и устанавливаем опцию **Pure Error** (Чистая ошибка).

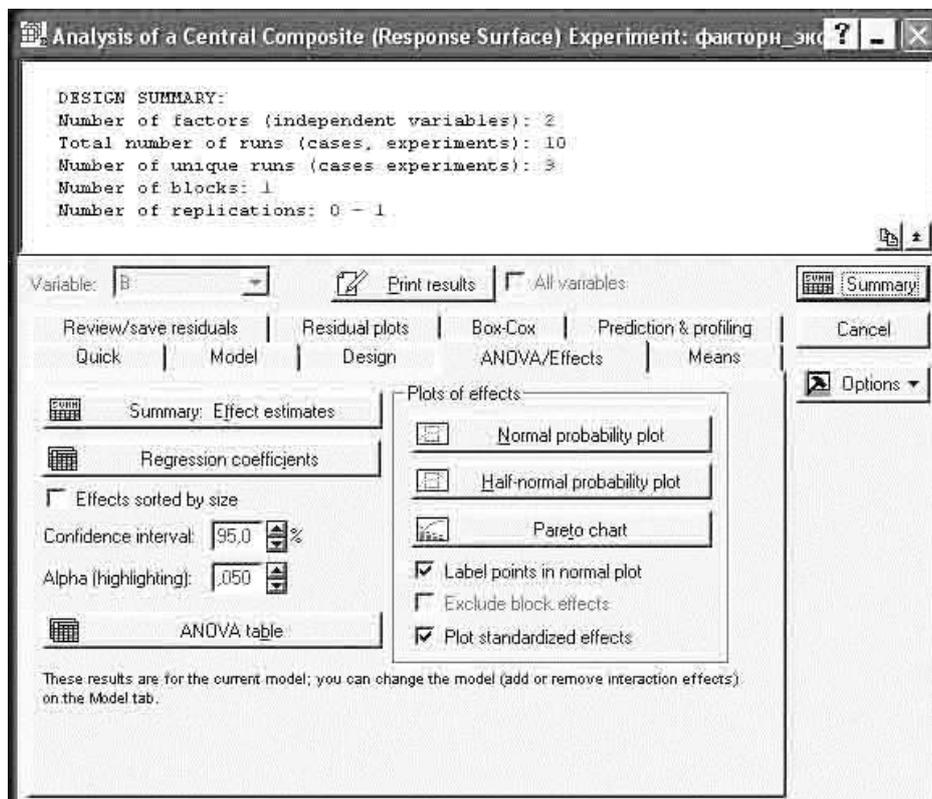


Рисунок 38 – Анализ эксперимента, вкладка ANOVA table (Таблицы)

Переходим на вкладку ANOVA / Effects, нажимаем кнопку ANOVA table (рис. 37).

В результате расчета в программе Statistica в таблицу (рис. 39) добавятся строки значения потери согласия и чистой ошибки (рис. 40). При анализе таблицы видно, что p-значение использованного дополнительного теста больше 0,05, это значит, что математическая модель представляется адекватной для описания отклика.

ANOVA; Var.: B; R-sqr=.88847; Adj.:.74907 (факторн_экспер/					
2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=2,000818					
DV: B					
Factor	SS	df	MS	F	p
(1)Уд(L)	7,08574	1	7,08574	3,54142	0,132994
Уд(Q)	4,87891	1	4,87891	2,43846	0,193419
(2)Ти (L)	45,49043	1	45,49043	22,73691	0,008852
Ти (Q)	1,48566	1	1,48566	0,74253	0,437447
1L by 2L	4,81803	1	4,81803	2,40803	0,195663
Error	8,00327	4	2,00082		
Total SS	71,76204	9			

Рисунок 39 – Результаты расчета

ANOVA, Var.: B; R-sqr=.88847; Adj.:.74907 (факторн_экспер(данные))
 2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Pure Error=4,11845
 DV: B

Factor	SS	df	MS	F	p
(1)Уд(L)	7,08574	1	7,08574	1,72049	0,414682
Уд(Q)	4,87891	1	4,87891	1,18465	0,473064
(2)Ти (L)	45,49043	1	45,49043	11,04552	0,186066
Ти (Q)	1,48566	1	1,48566	0,36073	0,655673
1L by 2L	4,81803	1	4,81803	1,16986	0,475056
Lack of Fit	3,88482	3	1,29494	0,31442	0,827467
Pure Error	4,11845	1	4,11845		
Total SS	71,76204	9			

ANOVA, Var.: B; R-sqr=.88847; Adj.:.74907 (факторн_экспер(данные))

Рисунок 40 – Данные расчета чистой ошибки и потери согласия

После чего строим вероятностный график и определяем статистическую значимость влияния факторов, участвующих в эксперименте.

Для дальнейшей работы устанавливаем снова опцию **SS Residual** (Остаточная сумма квадратов).

Рассмотрим теперь вероятностный график. На вкладке **ANOVA / Effects** нажимаем кнопку **Normal probability plot** (рис. 41).

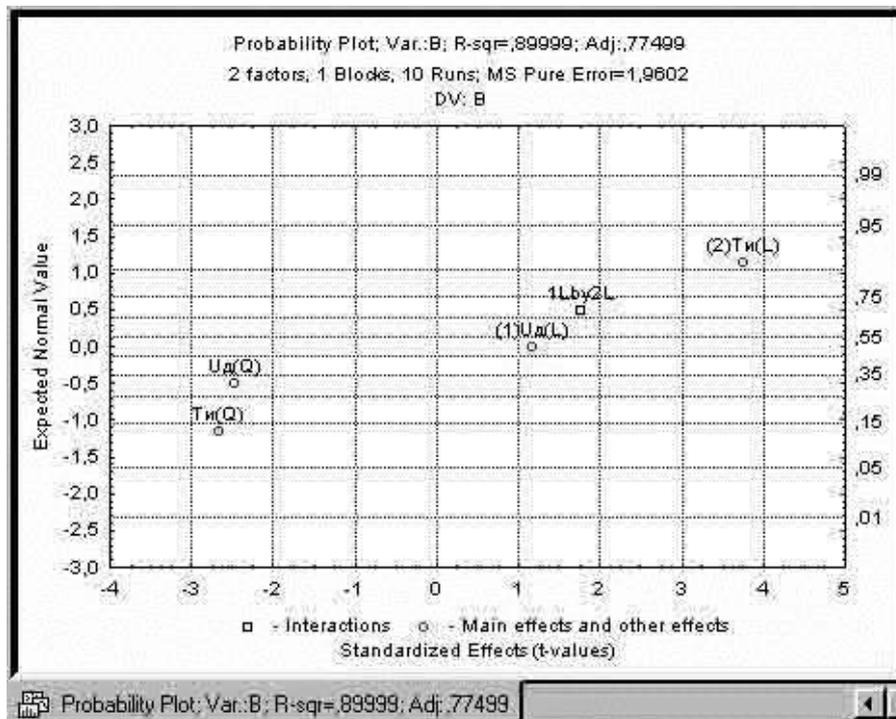


Рисунок 41 – Вероятностный график

Из графика (рис. 41) видно, что линейный член с меткой **L** находится в стороне от линии нормального распределения, что указывает на статистическую значимость его влияния на отклик, что является графическим подтверждением расчетных данных (рис. 39).

Рассмотрим также карту Парето. С помощью этой карты мы определяем значимость эффектов, какую дают исследуемые факторы.

На вкладке **ANOVA / Effects** нажимаем кнопку **Pareto chart** и получаем график в виде диаграмм (рис. 42).

Анализируя карту Парето, видим, что члены уравнения математической модели дают **незначимые эффекты, кроме линейного (2)Т_и L**. Соответствующая ему колонка **пересекает вертикальную линию, которая представляет 95%-ю доверительную вероятность.**

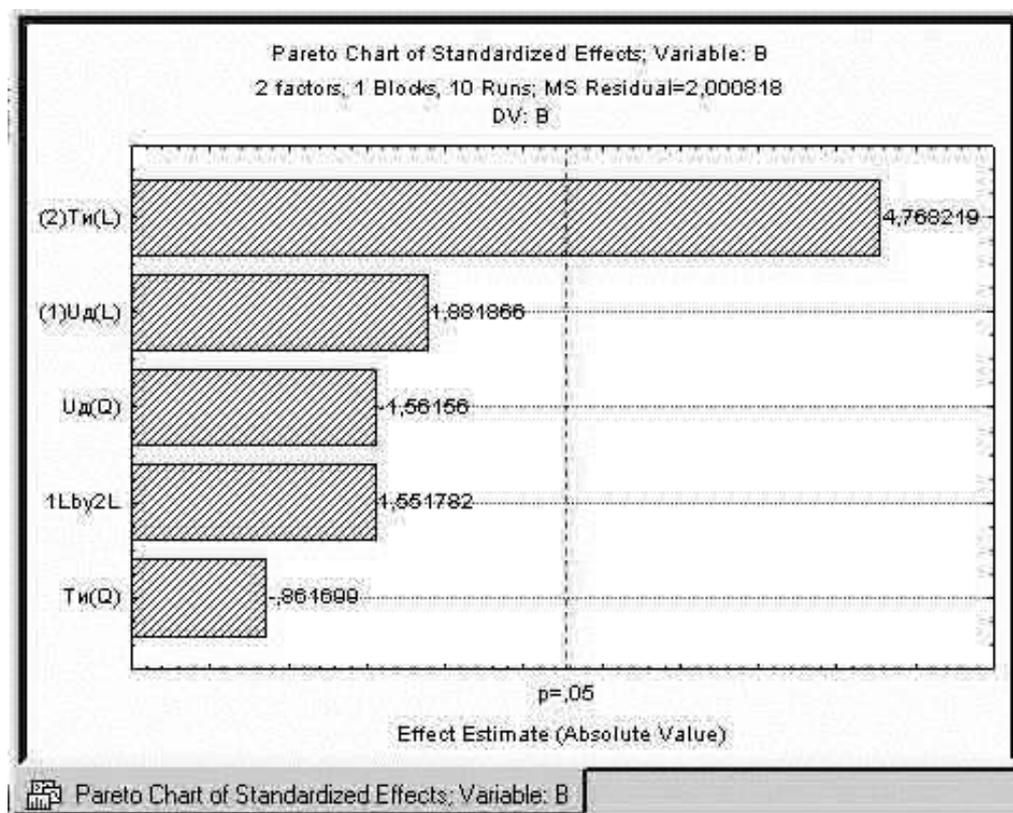


Рисунок 42 – Карта Парето

3 Расчет коэффициентов регрессии и построение математической модели. Определим коэффициенты искомой математической модели. На вкладке **ANOVA / Effects** нажимаем кнопку **Regression coefficients**. (Коэффициенты регрессии). Результат получаем в виде таблицы (рис. 43).

Получили **математическую модель** влияния напряжения на дуге **U_д**, температуры предварительного подогрева изделия **T_и** на ширину наплавленного сварочного валика **B**:

$$B_{расч} = -73,8739 + 7,032 U_{д} - 0,1493 U_{д}^2 - 0,0275 T_{и} + 0,0024 U_{д} T_{и}$$

Добавим в таблицу данных с результатами эксперимента (рис. 34) четвертый столбик **Врасч** с расчетными данными, полученными с помощью математической модели. Расчет выполняем аналогично (п. 6.4), т. е двойным щелчком мыши по имени столбца входим в окно редактирования столбца. В окне **Long Name** (Длинное имя) внизу диалогового окна записываем формулу математической модели:

$$= -73,8739 + 7,032 U_D - 0,1493 U_D^2 - 0,0275 T_H + 0,0024 U_D T_H$$

(уравнение регрессии) и нажимаем **ОК**. В столбце **Врасч** появятся значения отклика, рассчитанные по уравнению математической модели для всех факторов. Полученные значения приведены на рисунке 44.

Regr. Coefficients, Var.:B; R-sqr=.88847; Adj.:.74907 (факторн_экспер(данные))						
2 factors, 1 Blocks, 10 Runs; MS Residual=2,000818						
DV: B						
Factor	Regressn Coeff.	Std.Err.	t(4)	p	-95,% Cnf.Limt	+95,% Cnf.Limt
Mean/Interc.	-73,8739	55,24993	-1,33709	0,252168	-227,272	79,52447
(1)U _Д (L)	7,0320	4,60420	1,52730	0,201399	-5,751	19,81532
U _Д (Q)	-0,1493	0,09562	-1,56156	0,193419	-0,415	0,11616
(2)T _И (L)	-0,0275	0,04088	-0,67204	0,538378	-0,141	0,08602
T _И (Q)	-0,0000	0,00004	-0,86170	0,437447	-0,000	0,00007
1L by 2L	0,0024	0,00157	1,55178	0,195663	-0,002	0,00680

Рисунок 43 – Коэффициенты регрессии (уравнения математической модели)

Data: факторн_экспер(данные)* (10v by 10c)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	U _Д	T _И	B	Врасч	Var5	Var6	Var7	Var8	Var9	Var10
1	27,00000	50,0000	10,8	9,0154						
2	21,00000	50,0000	9,12	9,1018						
3	24,00000	38,2865	9,3	10,04972						
4	21,00000	350,0000	11,32	15,9718						
5	27,23427	200,0000	12,93	14,47331						
6	27,00000	350,0000	16,28	20,2054						
7	24,00000	200,0000	12,21	14,9173						
8	20,76573	200,0000	11,85	12,23778						
9	24,00000	361,7135	16,88	19,78488						
10	24,00000	200,0000	12,14	14,9173						

Рисунок 44 – Расчетные значения отклика

Из анализа данных (рис. 44) видно, что расчетные значения сильно отличаются от экспериментальных значений. Это означает, что полученные экспериментальные значения не совсем корректные и не совсем достоверные.

Определим область значений факторов, в которой значение отклика **В** является максимальным (или минимальным). Для этого лучше всего использовать график поверхности отклика.

На вкладке (рис. 38) **Анализ эксперимента** выбираем вкладку **Quick** и нажимаем кнопку **Fitted response surface** (Поверхность соответствия отклику). На рисунке 45 приведена поверхность отклика математической модели.

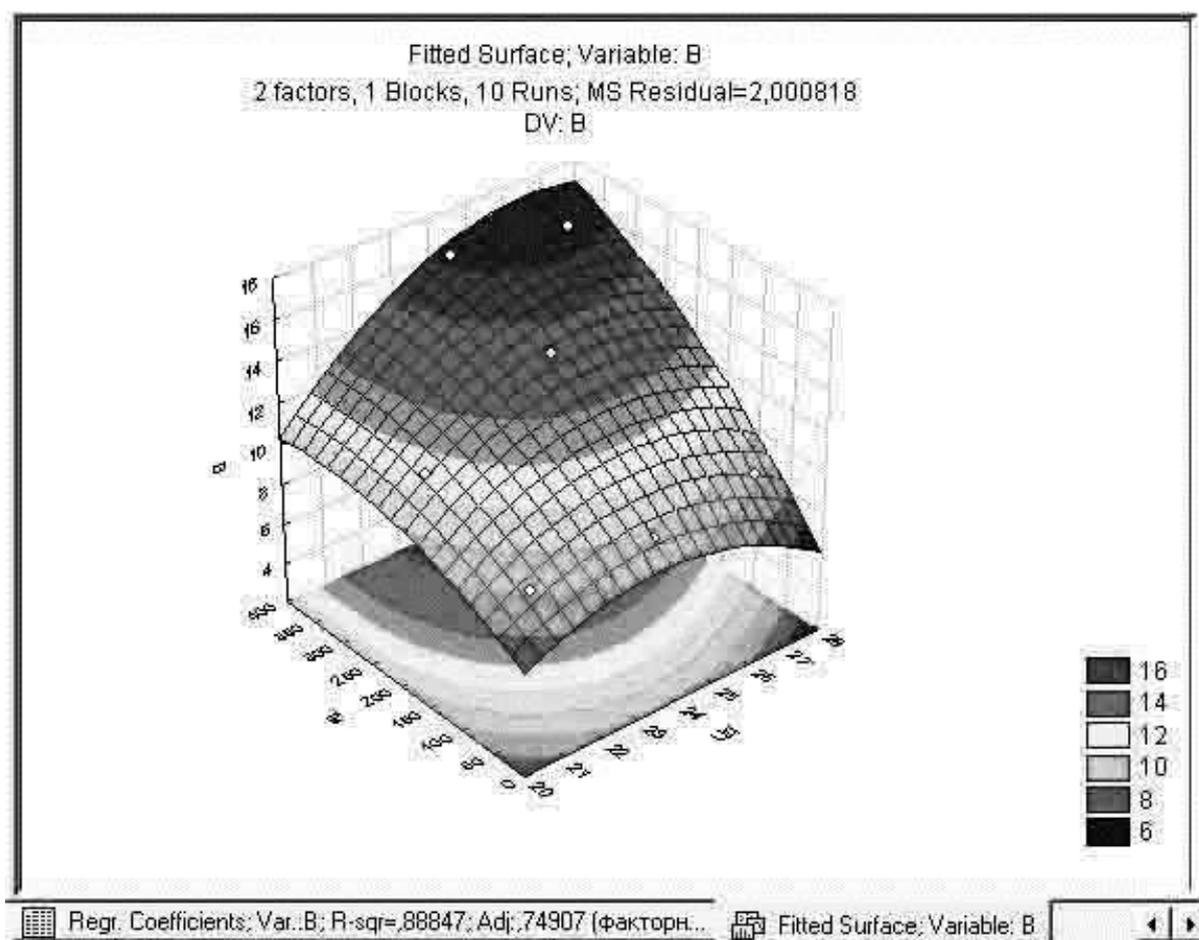


Рисунок 44–Поверхность отклика

Видно, что она проходит через экспериментальные точки (рис. 45). Эта поверхность имеет максимум, равный примерно 16,5. Для более детального рассмотрения области максимума целесообразно рассмотреть контурный график – кнопка **Fitted response profiles** на вкладке **Quick**. На рисунке 46 представлен контурный график зависимости отклика от заданных факторов.

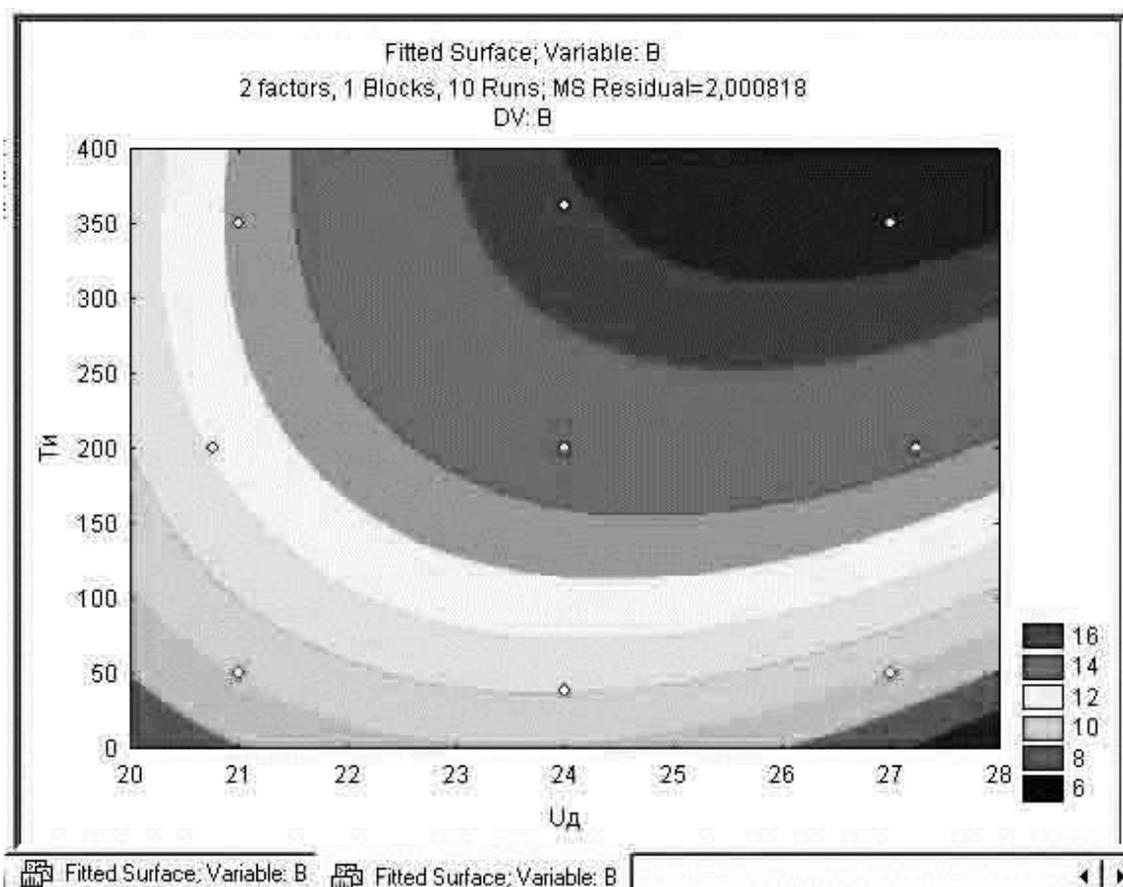


Рисунок 46 – Контурный график

Выводы

1 Создана математическая модель влияния напряжения на дуге, температуры предварительного подогрева на ширину наплавленного сварочного валика.

2 Анализ математической модели позволяет без проведения дополнительных экспериментов прогнозировать значения отклика от заданных факторов.

3 Установлено, что некоторые экспериментальные данные факторов не совсем корректны и соответствуют расчетным. Это может говорить о том, что данные эксперимента необходимо уточнить.

4 Для повышения значимости коэффициентов регрессии можно выбрать уравнение регрессии более высокой степени, допустим – регрессионное уравнение третьей степени.

5 Можно отметить, что при значениях факторов U_d более **25 В** и $T_{и}$ более **250°C** наибольшая ширина наплавленного валика сварного шва.

8 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

Математическое моделирование с использованием симплексно-решетчатого планирования (с использованием программы Statistica)

При создании и совершенствовании сварочных материалов (электродов, порошковых проволок, порошковых лент, флюсов), где имеется несколько компонентов, от которых зависят сварочно-технологические свойства материалов и свойства сварного шва или наплавленного металла, удобно пользоваться симплексно-решетчатым планированием с построением соответствующих графиков зависимостей исследуемых компонентов, поэтому эта практическая работа посвящена математическому моделированию технологии сварочного производства с использованием симплексно-решетчатого планирования.

Цель практической работы: научиться выполнять статистические расчеты обработки результатов эксперимента, создавать математическую модель путем симплексно-решетчатого планирования.

Задания к практической работе:

- научиться строить план эксперимента,
- научиться анализировать полученные данные,
- определение коэффициентов математической модели,
- выполнить анализ статистической значимости коэффициентов математической модели,
- построить график и уравнение математической модели,
- оценивать адекватность модели,
- проанализировать созданную математическую модель.

Пример

Создать математическую модель зависимости устойчивости горения сварочной дуги от шлакового состава порошковой проволоки (плавиковый шпат, карбонатный шлак, перовскит.)

Отклик (1) – устойчивость горения сварочной дуги (**S**, мм).

Факторы (3) – шлаковый состав: плавиковый шпат **Ps** (%), карбонатный шлак **Ks** (%), перовскит **P** (%). В таблице 10 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

В меню **Statistics** выбираем вкладку **Industrial Statistics & Six Sigma** (Индустриальная статистика Сигма шесть), на ней выбираем вкладку – **Experimental Design (DOE)** (Экспериментальный проект) (рис. 47). Затем работаем с появившимся окном. В появившемся окне **Design & Analysis of Experiments** (План и анализ экспериментов) выбираем **Mixture designs and triangular surfaces** (Планы для смесей и треугольные поверхности) (рис. 48), так как компоненты, выраженные в долях, в сумме должны равняться 1. Нажимаем **Ok**.

Таблица 10 – Экспериментальные данные

Опыт	Плавиновый шпат Ps, %	Карбонатный шлам Ks, %	Перовскит P, %.	S, мм
1	1	0	0	8,6
2	0,5	0,5	0	12,4
3	0	1	0	10,8
4	0	0,5	0,5	15,8
5	0	0	1	14,2
6	0,5	0	0,5	13,6
7	0,33	0,33	0,34	17,0
8	0,50	0,25	0,25	15,6
9	0,25	0,50	0,25	16,2
10	0,25	0,25	0,50	17,2

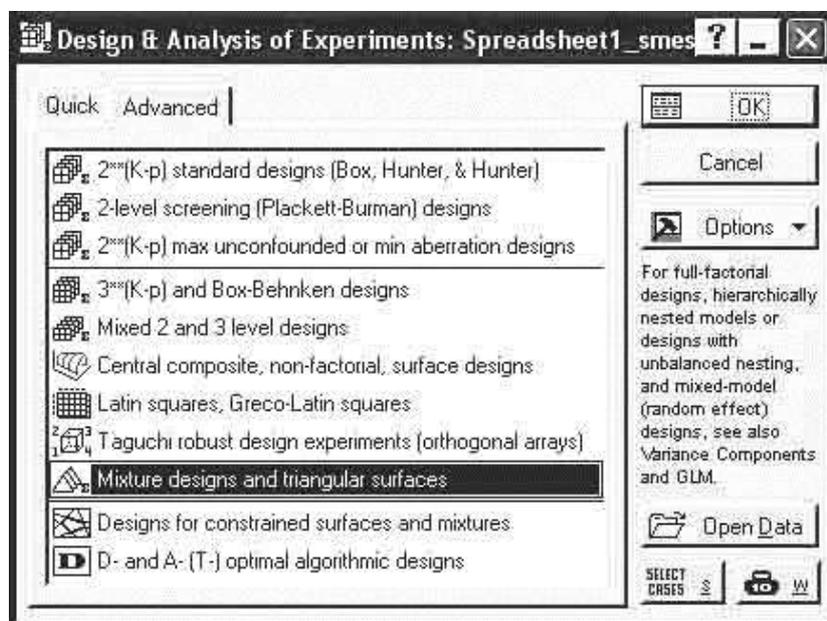


Рисунок 47 – План и анализ экспериментов

Откроется окно **Design & Analysis of Mixture Experiments**, вкладка **Design experiment** (рис. 47). В нем выбираем опцию **Simplex-centroid designs** (Симплекс-центроидный план), вводим **3** в поле **Number or factors** (Число факторов) и выделяем опцию **Augment with interior points** (Дополнить внутренними точками). Нажимаем **Ok**.

Появится диалоговое окно **Design & Analysis of Mixture Experiments** (План экспериментов для смеси).

Нажимаем кнопку **Change factor names, values** (Изменить имена факторов, значений) и заполняем таблицу в соответствии с исходными данными в появившемся диалоговом окне так, как показано на рисунке 50. Нажимаем **Ok**. Опции для настройки плана показаны на рисунке 51.

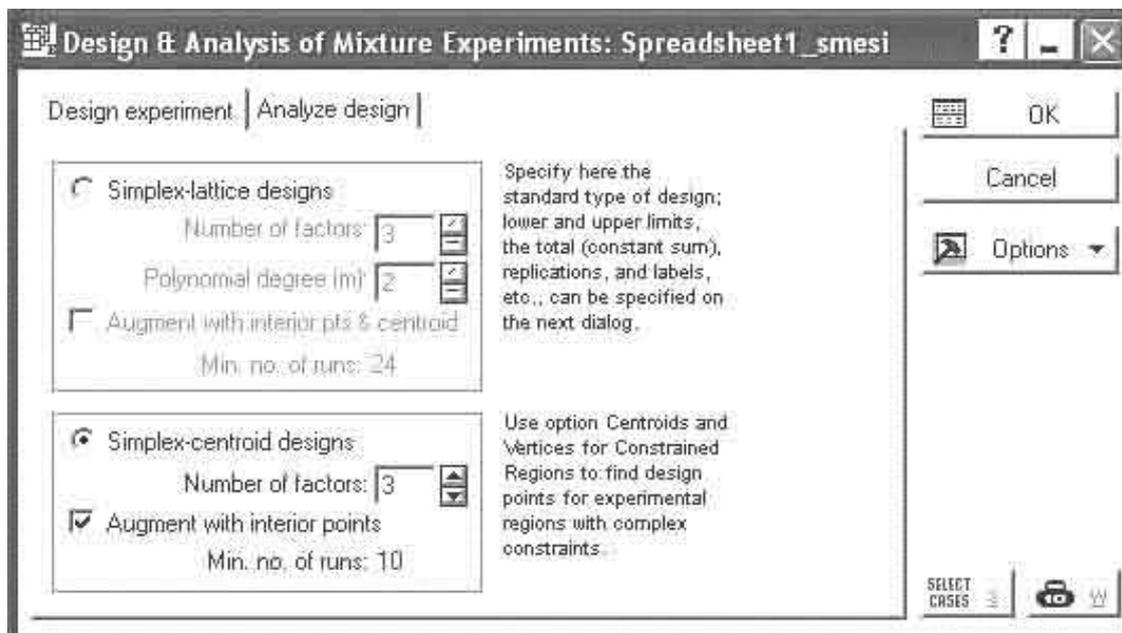


Рисунок 48 – Планы для смесей и треугольные поверхности

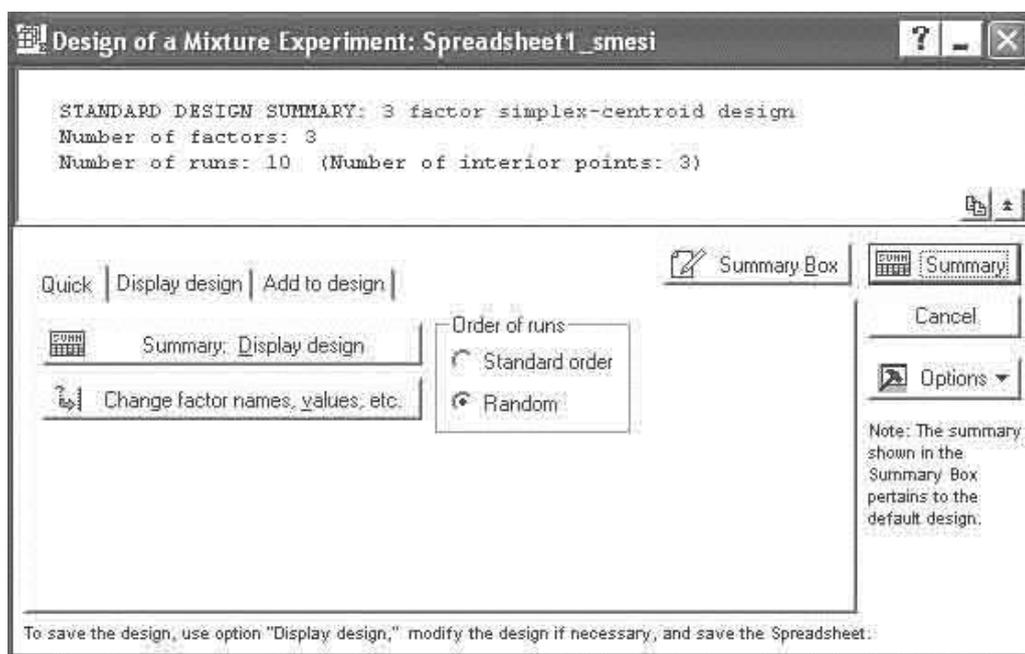


Рисунок 49 – Симплекс-центроидный план

Имена факторов: **Ps, Ks, P**. (Кстати, доли тоже могут быть в некоторых пределах. Например, для фактора A: 0,2–0,4 вместо 0–1).

Стандартный план **3 factors simplex-centroid design** (3 фактора симплекс-центроидное планирование), **Number of runs** (Количество опытов) **10**, **Number of interior points** (Количество дополнительных внутренних опытов) – **3**. **Факторы – именованные, порядок опытов – рандомизированный**. Нажимаем кнопку **Summary**. Получим план эксперимента (рис. 52).

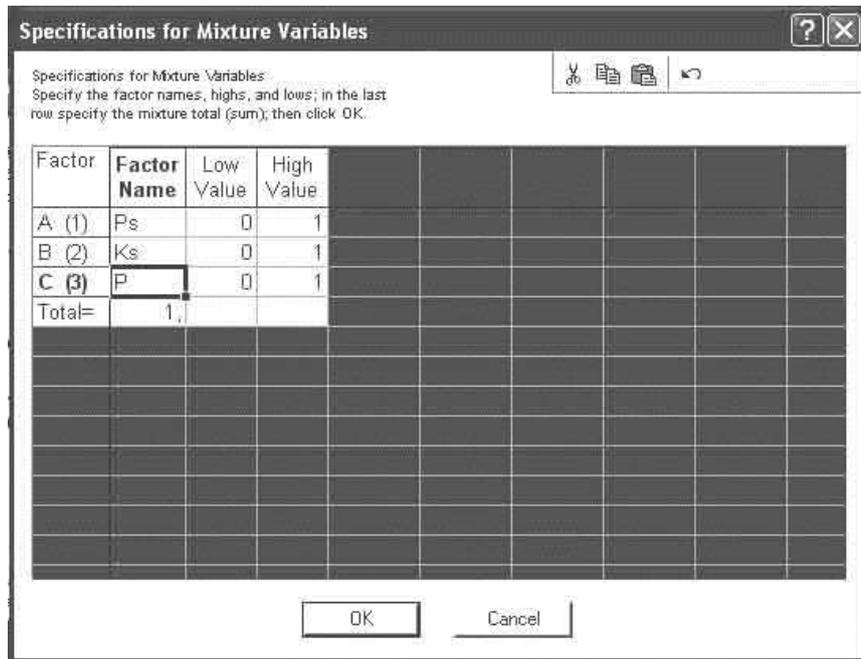


Рисунок 50 – Исходные данные

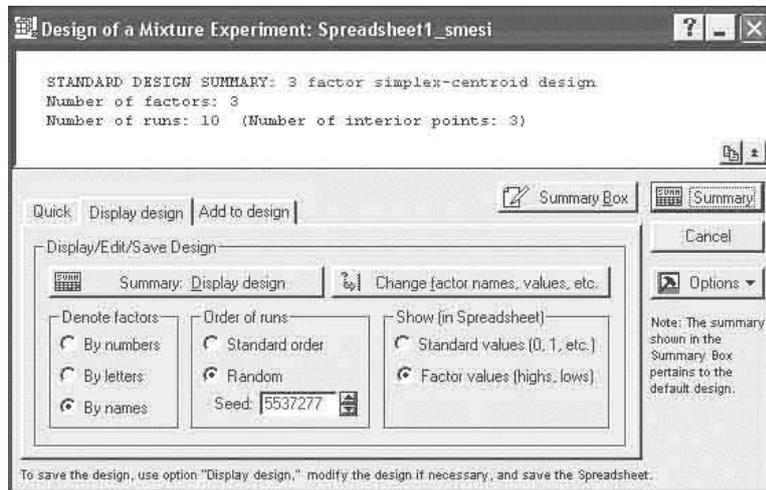


Рисунок 51 – Опции для настройки отображения плана

Standard Run	Ps	Ks	P
2	0,000000	1,000000	0,000000
3	0,000000	0,000000	1,000000
1	1,000000	0,000000	0,000000
4	0,500000	0,500000	0,000000
6	0,000000	0,500000	0,500000
9	0,166667	0,666667	0,166667
10	0,166667	0,166667	0,666667
5	0,500000	0,000000	0,500000
7	0,333333	0,333333	0,333333
8	0,666667	0,166667	0,166667

Рисунок 52 – План эксперимента

В построенной таблице показан порядок сбора экспериментальных данных. Перенесем данные в таблицу данных (**Data**) (рис. 53) и добавим значения, полученные в результате эксперимента – столбец **S** (табл. 8). В диалоговом окне **План эксперимента** (рис. 47) нажмем кнопку **Cancel** (Закончить). Вернемся в окно **Design & Analysis of Mixture Experiments** (рис. 48). Выберем вторую вкладку – **Analyze design** (Анализ плана) (рис. 54).

Standard Run	Ps	Ks	P	S
2	0,000000	1,000000	0,000000	8,6
3	0,000000	0,000000	1,000000	12,4
1	1,000000	0,000000	0,000000	10,8
4	0,500000	0,500000	0,000000	15,8
6	0,000000	0,500000	0,500000	14,2
9	0,166667	0,666667	0,166667	13,6
10	0,166667	0,166667	0,666667	17
5	0,500000	0,000000	0,500000	15,6
7	0,333333	0,333333	0,333333	16,2
8	0,666667	0,166667	0,166667	17,2

Рисунок 53 – Данные после проведения эксперимента

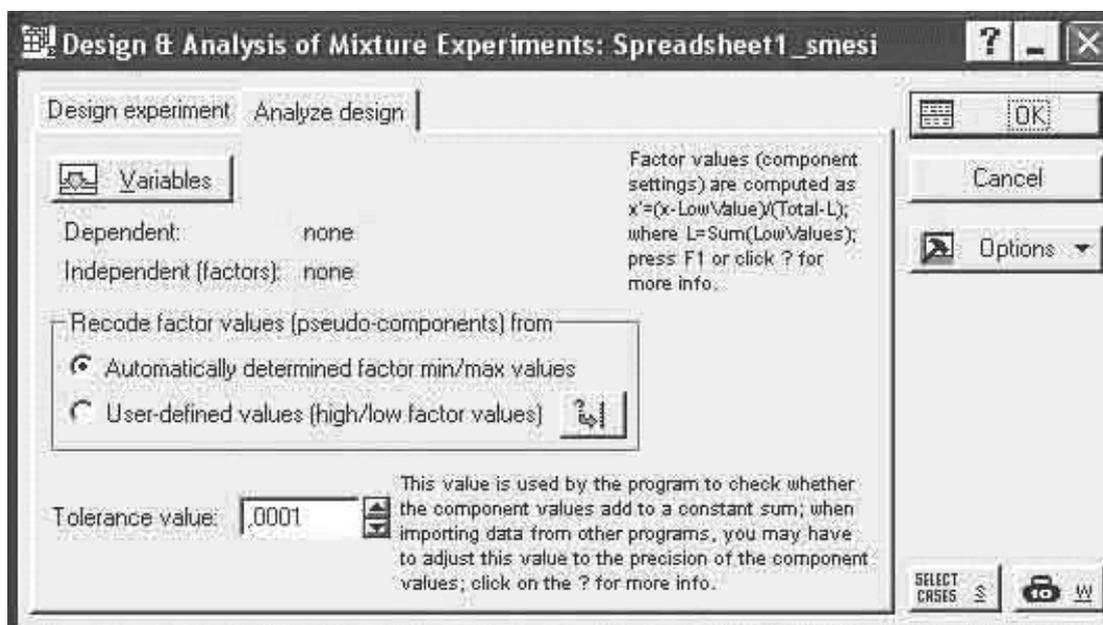


Рисунок 54 – Анализ плана

Нажимаем кнопку **Variables** (Переменные). Указываем в качестве **зависимой (Dependent)** переменной – **S**, а в качестве **независимых (Independent factors)** переменных – **Ps, Ks, P** (рис. 55), нажимаем клавишу **Ok**.

В поле **Recode factor values** (Для перекодирования использовать) оставим принятое по умолчанию положение **Automatically determined factor min/max values** (Автоматическое определение минимальных и максимальных величины фактора), **Ok**.

После чего во вкладке **Analyze design** (Анализ плана) появятся имена переменных (рис. 56).

Нажимаем **OK** и получаем диалоговое окно для выбора модели отображения плана эксперимента (рис. 57).

В окне для выбора модели на вкладке **Model** (Модель) выбираем **Специальная кубическая** (рис. 58).

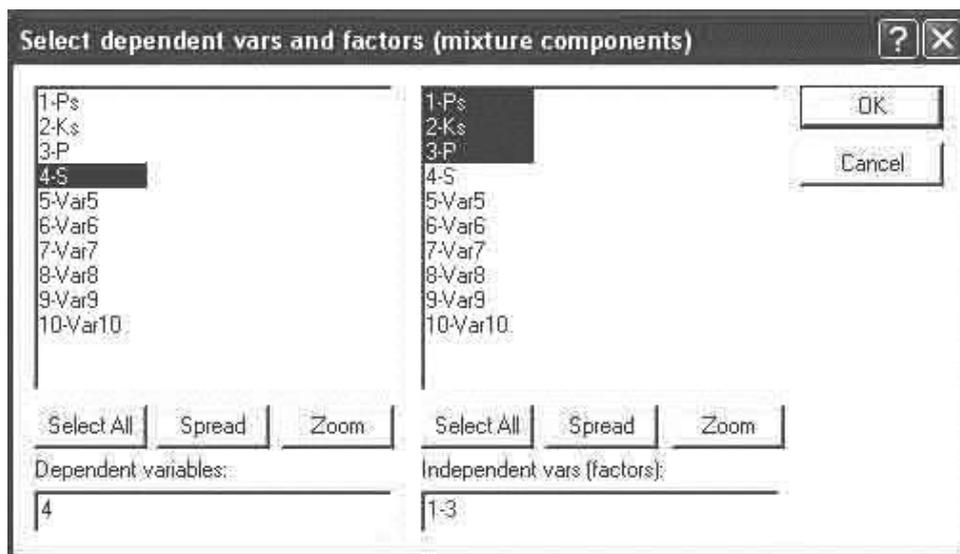


Рисунок 55 – Переменные

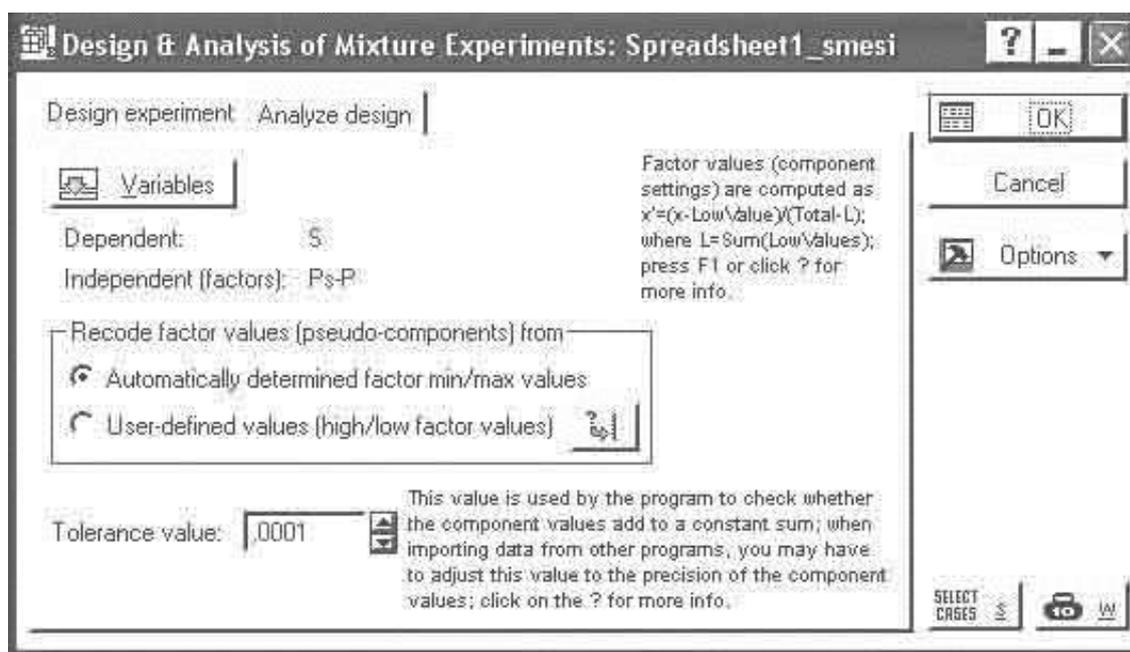


Рисунок 56 – Анализ плана с именами переменных

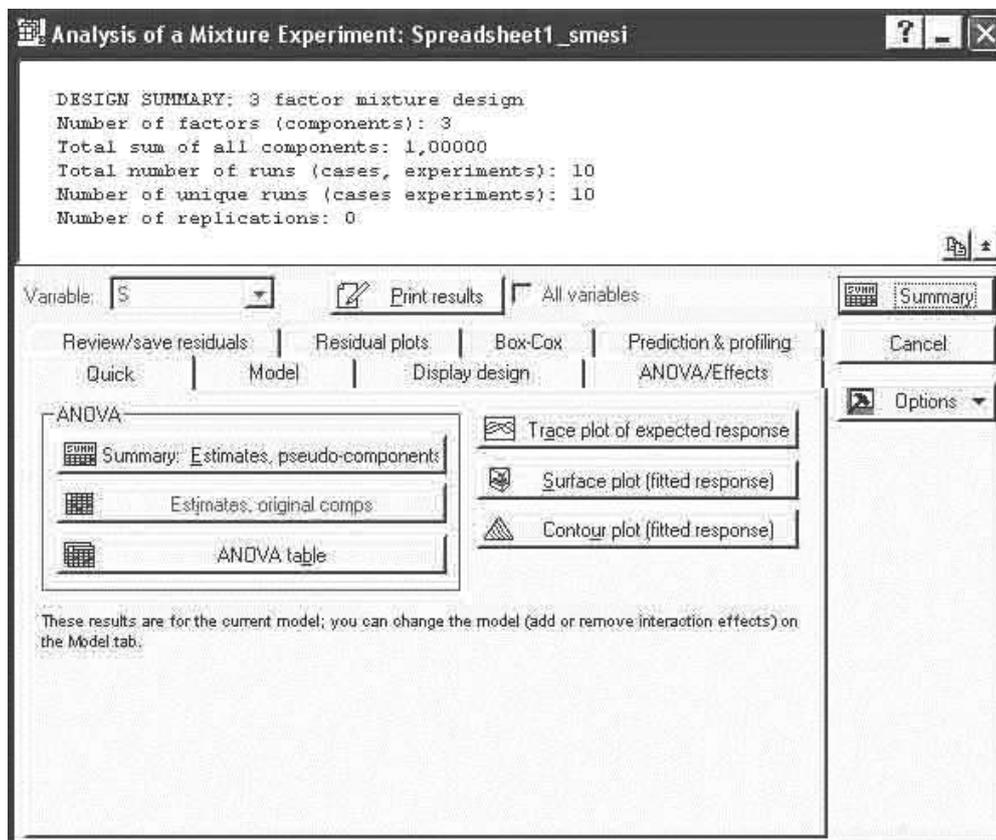


Рисунок 57 – Окно для выбора модели

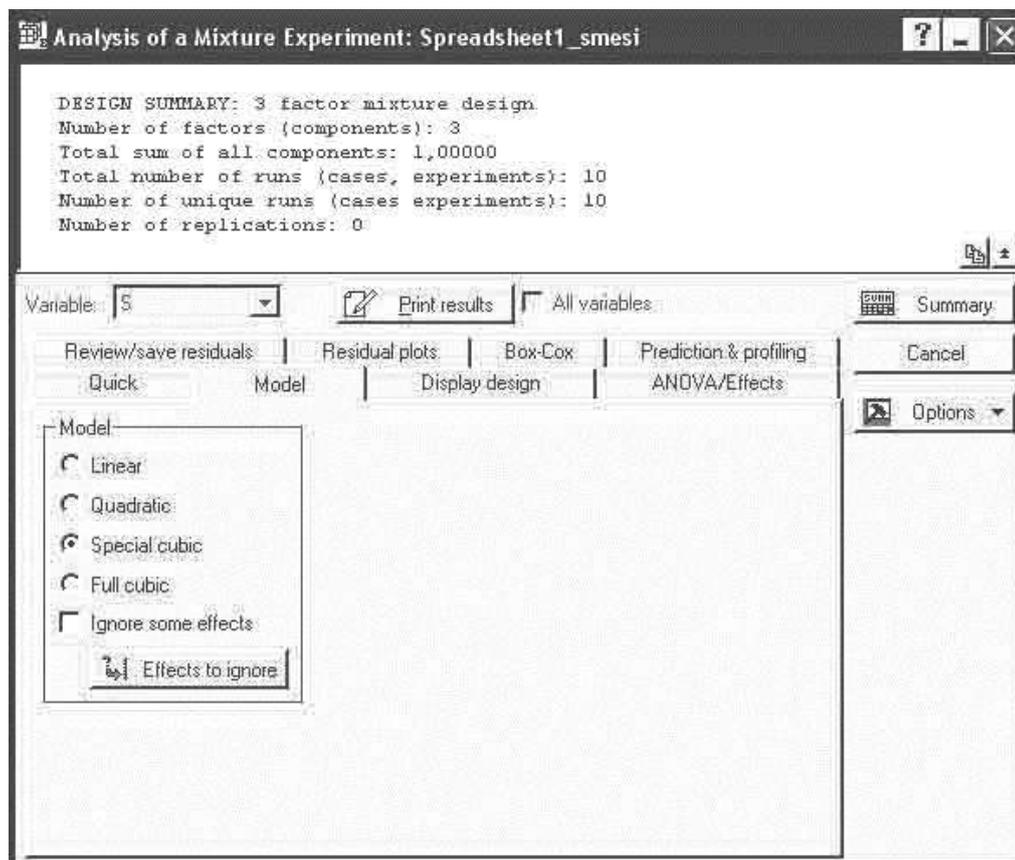


Рисунок 58 – Специальная кубическая модель

Переходим на вкладку **Quick** (Быстро) (рис. 58), нажимаем кнопку **ANOVA table** (Таблица “ANOVA”). Результат получим в виде двух таблиц (рис. 59 и 60).

ANOVA, Var.: S (Spreadsheet1_smesi)										
3 Factor mixture design; Mixture total=1, 10 Runs										
Sequential fit of models of increasing complexity										
Model	SS Effect	df Effect	MS Effect	SS Error	df Error	MS Error	F	p	R-Sqr	R-Sqr Adjusted
Linear	22,84111	2	11,42056	49,00289	7	7,000412	1,6314	0,262065	0,317927	0,123048
Quadratic	44,81987	3	14,93996	4,18301	4	1,045753	14,2863	0,013267	0,941776	0,868997
Special Cubic	4,13758	1	4,13758	0,04544	3	0,015145	273,1931	0,000482	0,999368	0,998103
Total Adjusted	71,84400	9	7,98267							

Рисунок 59 – Анализ плана для трех моделей (линейной, квадратичной и кубической)

Overall Fit of Model; Var.: S (Spreadsheet1_smesi)						
3 Factor mixture design; Mixture total=1, 10 Runs						
Source	SS	df	MS	F	p	
Model	71,79856	6	11,96643	790,1110	0,000070	
Total Error	0,04544	3	0,01515			
Total Adjusted	71,84400	9	7,98267			

Рисунок 60 – Дисперсионный анализ кубической модели

В этой таблице (рис. 59) приведена сводка анализа для 3-х моделей (линейной, квадратичной и специальной кубической). Обратим внимание на анализ выбранной кубической модели.

Статистически значимые эффекты, когда **уровень $p < 0,05$** , критерий **Стьюдента** для нашей модели **$p = 0,000482 < 0,05$** .

SS Residual (Остаточная сумма квадратов) для нашей модели **4,13758**.

Для выборки объема **n** выборочная дисперсия вычисляется как сумма квадратов отклонений от выборочного среднего, деленная на **n-1** (объем выборки минус единица), **SS (Error)** для нашей модели **0,04544**. **MS**

(Effekt) средний квадрат эффекта для нашей модели **4,13758** и компоненты дисперсии, обусловленной внутригрупповым разбросом (называемой **средним квадратом ошибки** или **MS (Error)**, для нашей модели **0,015145**.

F (Критерий Фишера). Полученные внутригрупповые дисперсии сравнивают с помощью этого критерия, проверяющего, действительно ли отношение дисперсий значимо больше **1**, для нашей модели **273,1931**.

Качество регрессионной модели оценивается с помощью коэффициента детерминации **R-квадрат (R-Sqr)**, для нашей модели **0,999368** – очень хорошее.

Из дисперсионного анализа видно, что **критерий Фишера, критерий Стьюдента, остаточная сумма квадратов** соответствуют достаточно высокому уровню значимости, и можно определить коэффициенты регрессионного уравнения.

Далее нажимаем кнопку **Summary: Estimates, pseudo-components** (Оценки псевдокомпонент). Программа отобразит статистики, рассчитанные для специальной кубической модели (рис. 61).

Coeffs (recoded comps); Var.: S, R-sqr=.9994, Adj.:.9981 (Spreadsheet1_si 3 Factor mixture design; Mixture total=1., 10 Runs DV: S; MS Residual=.0151452						
Factor	Coeff.	Std.Err.	t(3)	p	-95, Cnf.Limit	+95, Cnf.Limit
(A)Ps	8,60594	0,122463	70,2740	0,000006	8,21621	8,99567
(B)Ks	10,77985	0,122463	88,0257	0,000003	10,39012	11,16958
(C)P	14,21192	0,122466	116,0483	0,000001	13,82218	14,60166
AB	10,71372	0,598245	17,9086	0,000380	8,80984	12,61761
AC	8,90771	0,598361	14,8869	0,000658	7,00346	10,81196
BC	13,15119	0,598361	21,9787	0,000206	11,24694	15,05544
ABC	55,82951	3,377761	16,5286	0,000482	45,07996	66,57906

Рисунок 61 – Коэффициенты модели и статистические характеристики

Здесь: **Coeff** – коэффициенты модели, **t (3)** – наблюдаемые значения критерия **Стьюдента**, **p** – значимость коэффициентов по критерию **Стьюдента**, два последних столбца – интервалы для коэффициентов.

Все коэффициенты модели для всех факторов **значимые**, рассчитанные статистические критерии подтверждают это.

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, рассмотрим графики.

На вкладке (рис. 57) нажимаем кнопку **Surface plot** (График поверхности). Получаем поверхность отклика для трех заданных факторов (рис. 62).

На графике (рис. 62) поверхности отклика хорошо виден максимум. Заметьте, что зависимость имеет нелинейный характер.

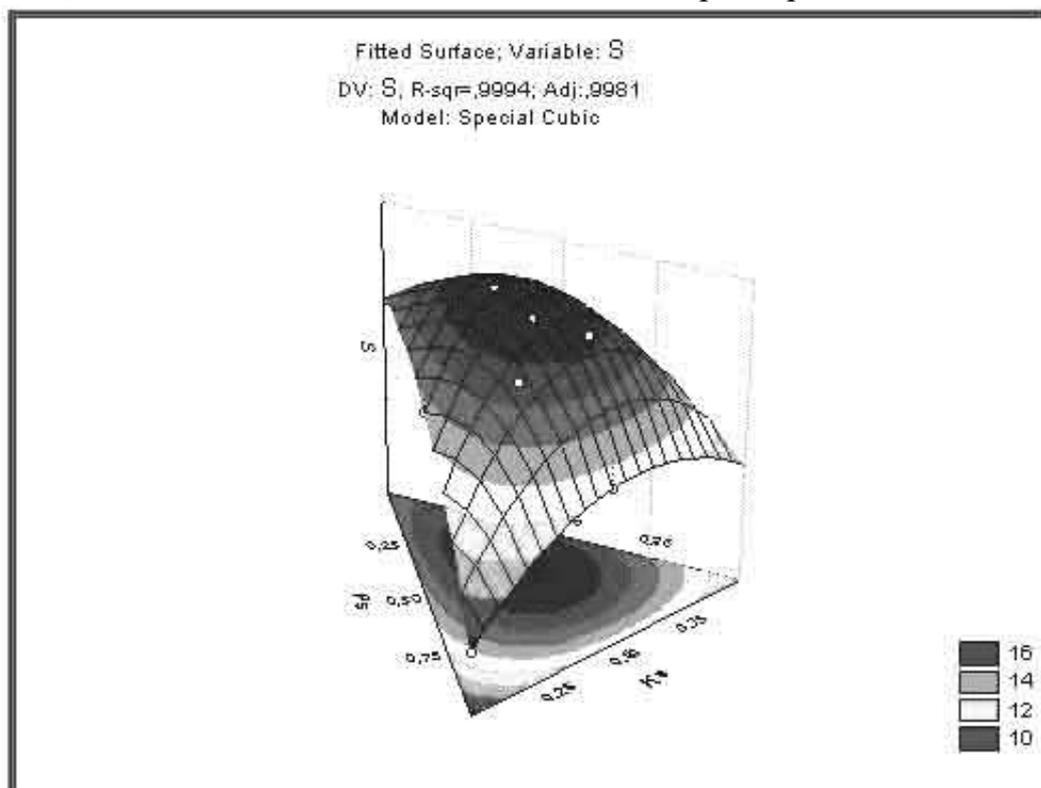


Рисунок 62 – Поверхность отклика

Математическое описание поверхности отклика следующее:

$$S = +8,60594065083 * x + 10,779853694308 * y + 14,211921060581 * z + 10,713722588321 * x * y + 8,9077078200625 * x * z + 13,151186080932 * y * z + 55,829505624493 * x * y * z.$$

Для более точного определения оптимальных долей компонентов шлакового состава порошковой проволоки рассмотрим контурный график на вкладке (рис. 57) нажимаем кнопку **Contour plot** (Контурный график) (рис. 63). Можно использовать вместо цветного графика оттенки серого (рис. 64).

Анализируя полученный график, можно отметить, что оптимальные значения компонентов порошковой проволоки лежат в области значений для:

плавикового шпата – **Ps = 60–90%**,
карбонатного шлама – **Ks = 49–80%**,
перовскита – **P = 35–75%**.

Выводы

1 Создана математическая модель зависимости устойчивости горения сварочной дуги от шлакового состава порошковой проволоки (плавиковый шпат, карбонатный шлам, перовскит).

2 Определены оптимальные значения шлаковых компонентов порошковой проволоки $P_s : K_s : P = 12 : 10 : 7$.

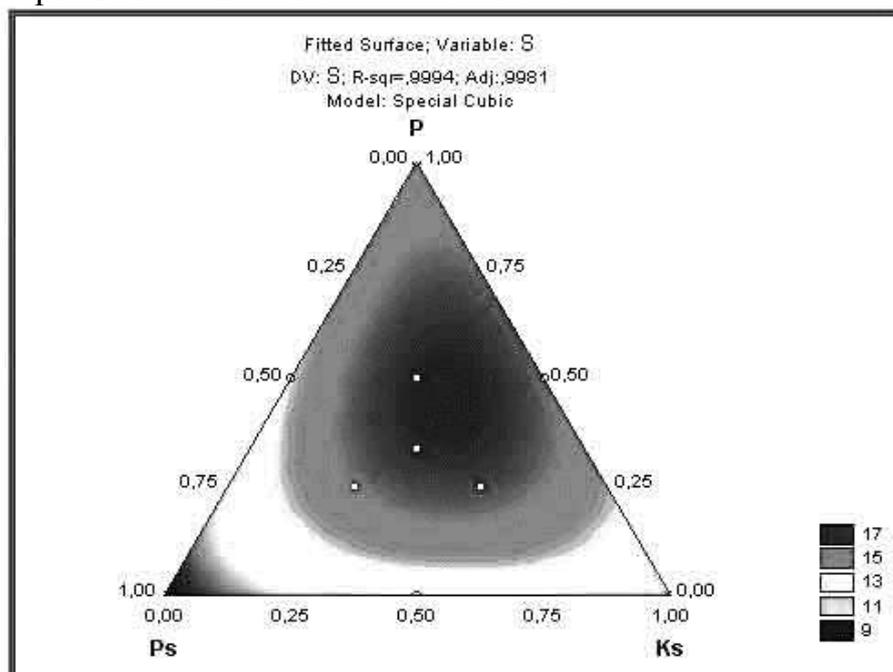


Рисунок 63 – Цветной контурный график

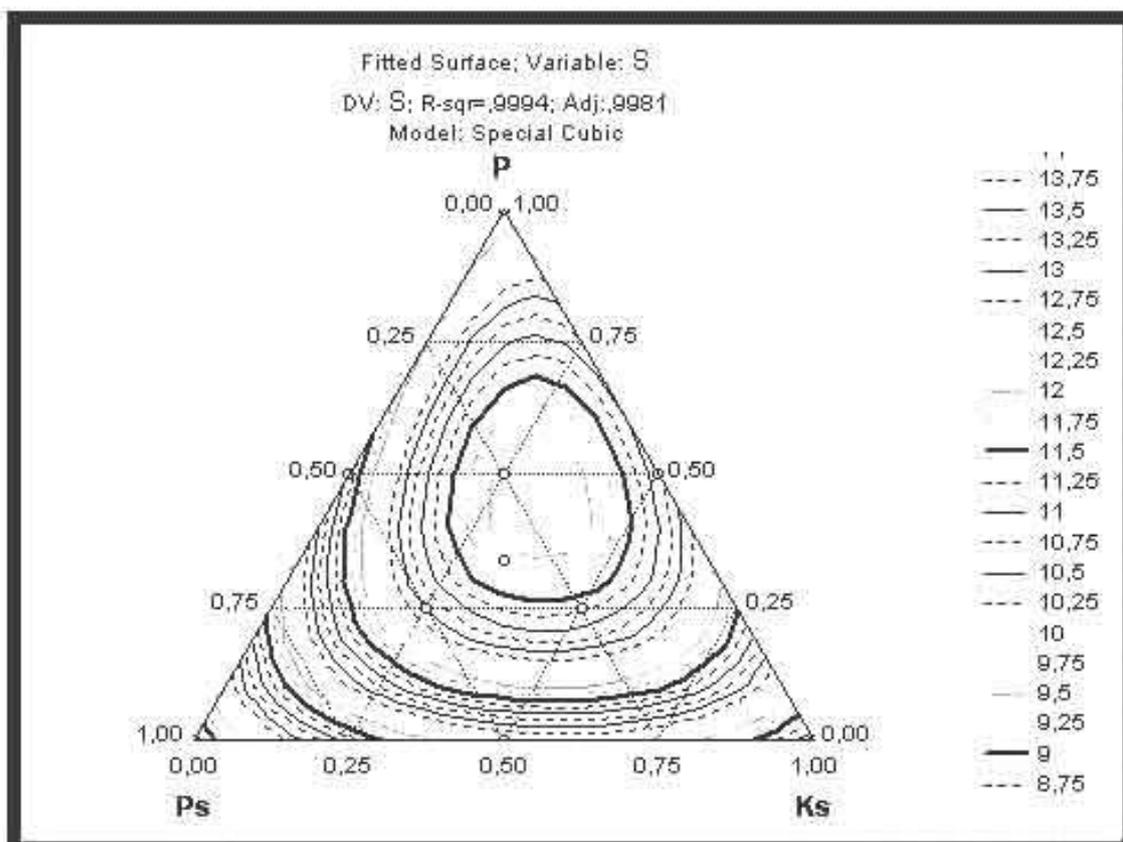


Рисунок 64 – Контурный график

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абстракция	5;	Свариваемость	20;
Адекватность.....	10, 21;	Свойства объекта.....	5;
Вероятностный график	61;	Симплексное планирование	66;
Воспроизводимость опытов ...	28;	Синтез, алгоритм	24;
Графическое изображение поверхности отклика.....	17, 43;	Системный анализ	21;
Динамическая оптимизация.....	11;	Средневзвешенная дисперсия..	35;
Дисперсия опыта	36;	Статическая оптимизация	11;
Доверительный интервал	37;	Эффект взаимодействия	30;
Звездные точки	29;	Таблица кодирования факторов.....	29;
Интервал варирования	29;	Уравнения регрессии.....	16;
Интерпретация.....	10;	Уровень значимости	36;
Карта Паретто	62;	Фактор	7;
Контурный график	76;	Формализованная схема.....	19;
Коэффициенты регрессии .	16, 28;	Цель моделирования.....	11;
Критерий Кохрена	36;	Черный ящик.....	7
Критерий Стьюдента.....	35;	Шаговый метод.....	17.
Критерий Фишера.....	38;		
Линейный полином	18;		
Математическая модель	4;		
Матрица планирования	30;		
Метод Боксу - Уилсона	15;		
Модель 2-го порядка	16;		
Модификация	10;		
Нулевой уровень фактора.....	29;		
Объект исследования	4;		
Однофакторные модели	40;		
Отклик.....	7;		
Оптимум.....	15;		
Ортогональность.....	32;		
Основной уровень фактора	28;		
Параметр оптимизации	8;		
План насыщенный	35;		
План рототабельный.....	35;		
Поверхность отклика.....	17;		
Полином.....	16;		
Построение модели	10;		
Программа Statistica	39-83;		
Работоспособность	22;		
Рандомизация.....	27;		

ЛИТЕРАТУРА

1 Винарский М. С. Планирование эксперимента в технологических исследованиях / М. С. Винарский, М. В. Лурье. – Киев: Техника, 1975. – 167 с.

2 Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 496 с.

3 Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

4 Усенко А. С. Основы математического моделирования и алгоритмизации процессов функционирования сложных систем. – М.: Наука, 2000. – 410 с.

5 Макаров Э. Л. Система компьютерного анализа свариваемости и технологии сварки конструкционных легированных сталей / Э. Л. Макаров, А. В. Коновалов // Сварочное производство. – 1995. – №3. – С. 6-9.

6 Компьютерное проектирование и подготовка производства сварных конструкций: Учеб. пособ. для вузов / Под ред. С. А. Куркина и В. М. Ховова. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 464 с.

7 Зегнидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. – М.: Наука, 1976. – 390 с.

8 Применение математических методов и ЭВМ. Планирование и обработка результатов эксперимента / Под ред. А. Н. Останина. – Минск: Высшая школа., 1989. – 218 с.

9 Боровиков В. П. STATISTICA / В. П. Боровиков, И. П. Боровиков. – М.: 1997. – 592 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Краткие сведения о системе Statistica V6.0

1 Структура пакета Statistica 6

Программа **Statistica** содержит несколько независимо работающих модулей, что открываются с помощью пункта меню **Statistics** (рис. А.1). В каждом модуле собраны логически связанные между собой статистические процедуры. Работать можно сразу с несколькими модулями. Кнопки этих модулей находятся в нижней части экрана. Переходить между ними можно стандартным образом, щелкнув левой клавишей мыши по соответствующей кнопке.

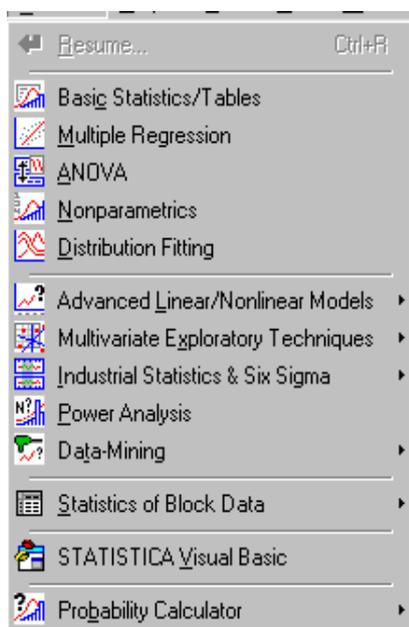


Рисунок А1 – Модули программы Statistica

2 Создание новой таблицы данных

Для этого необходимо выбрать пункт меню **File – New**(файл новый), нажать кнопку **Ok**. Откроется пустая электронная таблица размером 10 x 10 (рис. А.2). В столбцах размещены переменные (**Vars**), в строках – наблюдения (**Cases**).

3 Удаление и добавление новых переменных и случаев

Выполняется командами **Delete** (удалить) и **Add** (добавить). После выделения строки или столбца нажать кнопку **Vars**, если удаляются или добавляются переменные, и указать, сколько элементов удаляется или добавляется, **Ok**. Для случаев – аналогично, но с кнопкой **Cases**.

	1	2	3	4	5	6	7
	Var1	Var2	Var3	Var4	Var5	Var6	Var7
1							
2							
3							
4							

Рисунок А.2 – Пустая электронная таблица

4 Корректирование таблиц

Корректирование таблицы сводится к корректированию наименований переменных, содержания столбцов целиком и отдельных ячеек. Для этого выполняется щелчок по имени столбца **Vars** (переменные) (рис. А.2).

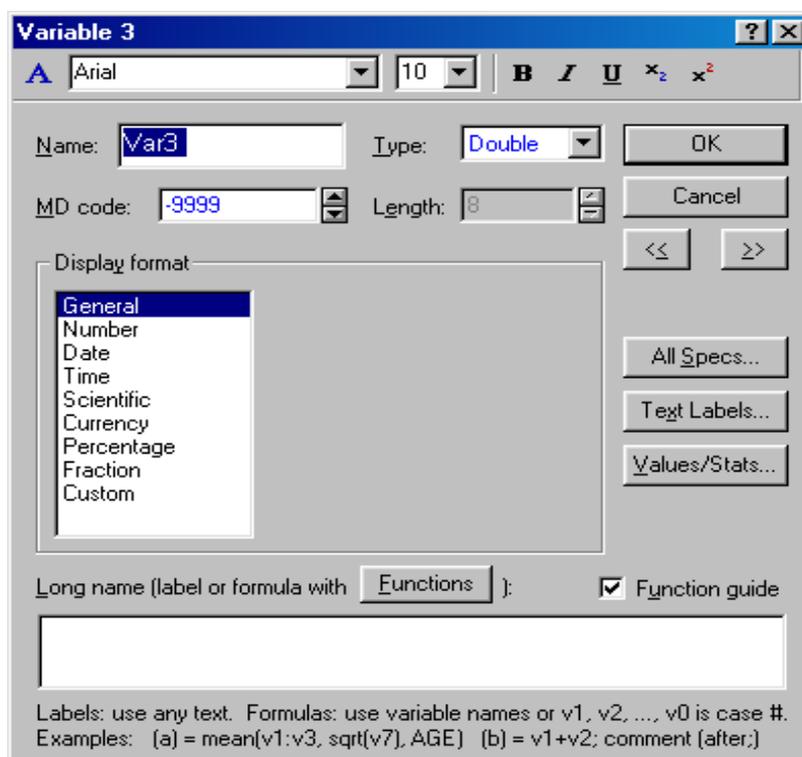


Рисунок А.3– Вкладка для корректирования таблицы

После этого можно задавать новое имя столбца в поле **Name** (имя) и новые значения наблюдений с помощью формулы в поле **Long name** (полное имя) (рис. А.3). Также можно изменить представление числа (автоматически – 8 позиций (**Column width**), число позиций после запятой (**Decimals**) – 3).

Корректирование числовых значений в отдельных ячейках выполняется, как в EXCEL.

5 Вычисление статистических характеристик для значений переменных

Вычисляем статистические характеристики (например: максимальное, минимальное, среднее значение, дисперсия и т. д.). Активировать таблицу данных, затем вызываем пункт меню **Statistics – Basic Statistics / Tables – Descriptive Statistics** – вкладка **Advanced** (Статистики – описательные статистики – все статистики) (рис. А.4).

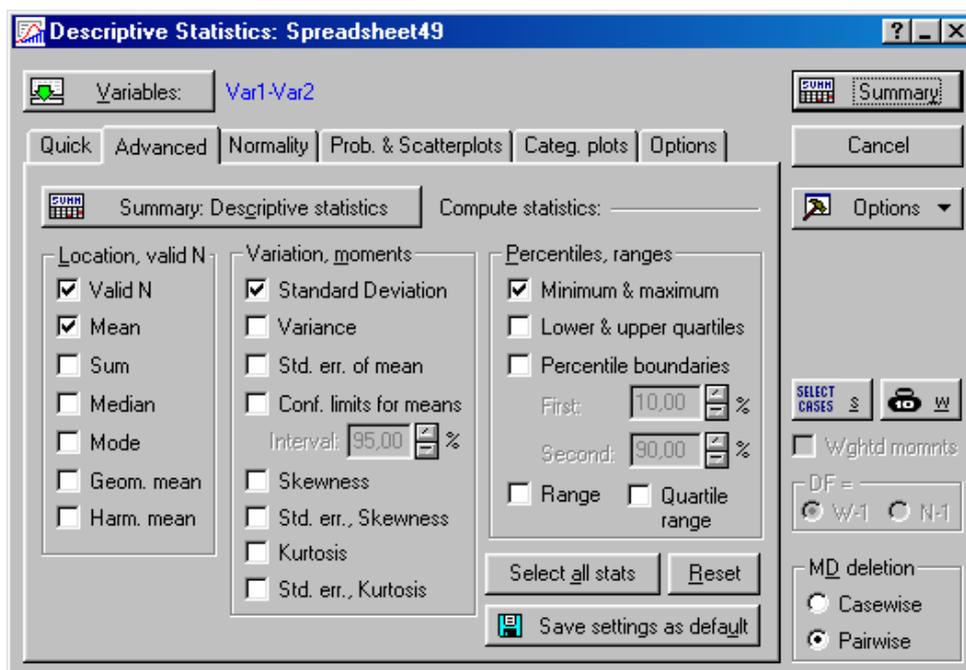


Рисунок А.4 – Вкладка *Описательные статистики*

Выделить переменные, для которых находят характеристики (кнопка **Variables**), **Ok**, выбрать из списка нужные статистические характеристики (например: **Min** – минимальное значение, **Max** – максимальное значение, **Valid N** – объем выборки, **Mean** – среднее значение, **Standard Deviation** – среднеквадратическое отклонение, кнопка **Summary**). На экране появится таблица с нужными характеристиками.

6 Получение графика и уравнения линейной регрессии

Активировать таблицу. Выбрать пункт меню **Graphs, 2D Graphs, Scatterplots**, вкладка **Advanced**, (графики, статистические 2-мерные графики, точечный график), выбрать переменные **Variables** (для аргумента – **X** и функции – **Y**), **Ok**, выбрать опции **Regular, Linear**, (регулярный, линейный), **Ok** (рис. А.5).

Появится график линейной регрессии, над которым записано уравнение регрессии (рис. А.6).

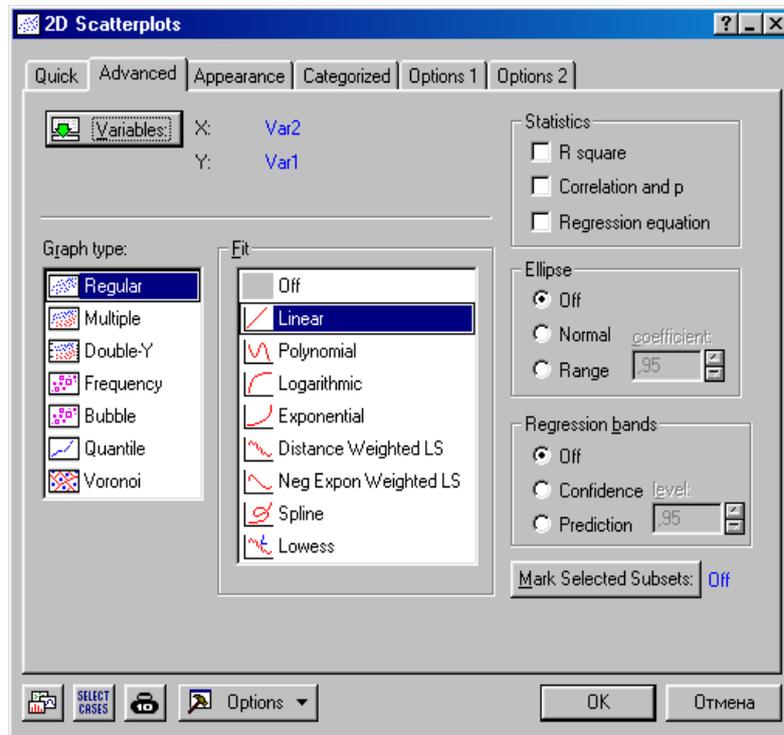


Рисунок А.5 – Вкладка *Advanced* (Дополнительно)

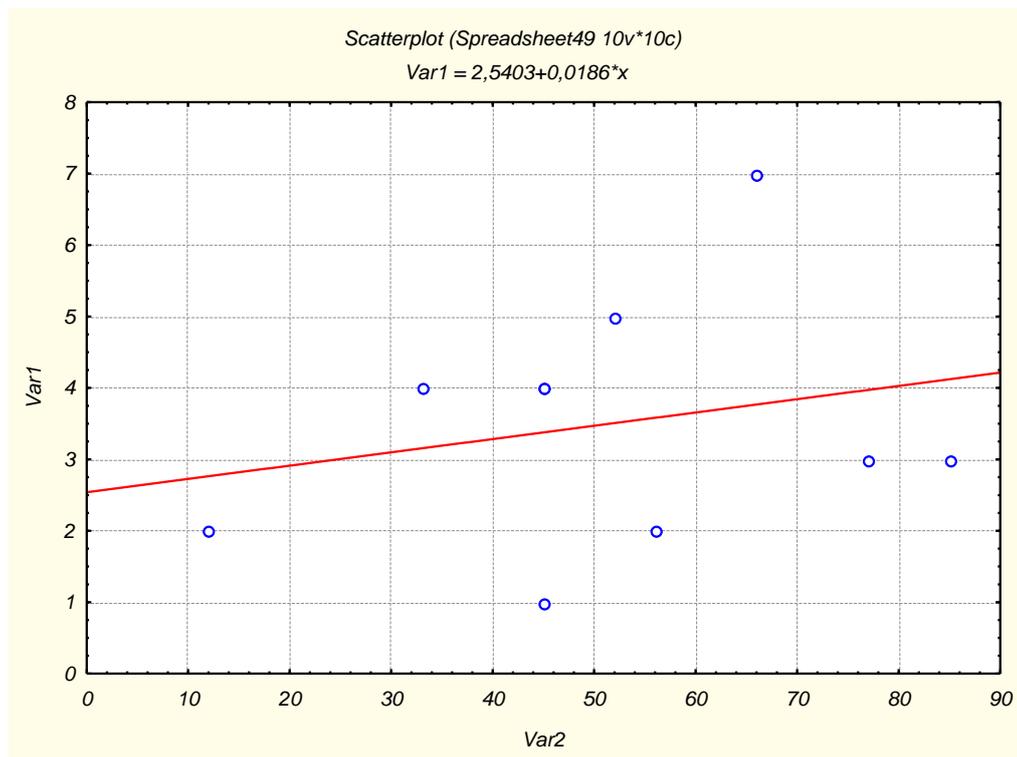


Рисунок А.6 – График линейной регрессии

7 Типы файлов в системе Statistica

Типы файлов: ***.sta** – данные; ***.stw** – результаты обработки данных, **Workbook**; ***.str**, или ***.rtf** – отчет.

8 Создание автоотчета

Автоотчет желательно создавать при каждом сеансе работы с пакетом для того, чтобы все результаты работы (таблицы и графики) запоминались в автоотчете. Для создания короткого автоотчета вызываем пункт меню **File, Output Manager** (Файл, Управление выводом данных). Появится многостраничное меню.

На странице **Output Manager** нужно отметить следующие опции: **Single Workbook, Place results in Workbook automatically** (Одна рабочая тетрадь, место для результатов в блокноте –автоматически), **Also send to Report Window, Single Report** (Также передать в Window одиночный отчет) (рис. А.7).

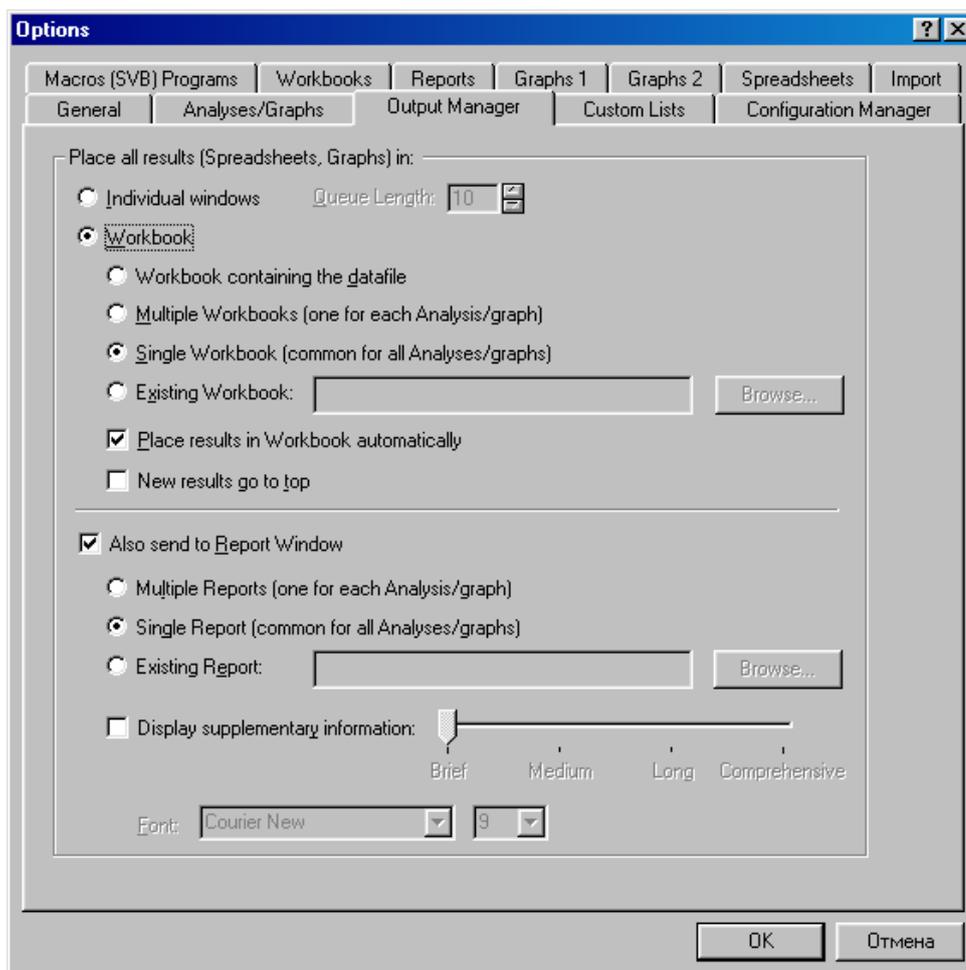


Рисунок А.7 – Вкладка *Output Manager*

На странице **Workbook**, кроме уже заданных опций, в поле **Add to Workbook performs** (Добавить в рабочую тетрадь результаты) отметить опцию **Copy** (Копировать). На странице **Report** (Отчет), кроме уже заданных опций, в поле **Add to Report performs** отметить опцию **Copy**. После этого нажать **Ok**. Теперь все расчетные таблицы и графики автоматически заносятся в отчет.

Файл отчета нужно сохранить с расширением ***.rtf**. Теперь его можно редактировать в **WORD**.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Варианты заданий к практической работе №1

Пример 1

Создать математическую модель влияния относительной толщины мягкой прослойки АД1 h на предел прочности сварного соединения разнородных сталей 12Х18Н10Т + АД1 + АМг6 σ_B .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.1.

Таблица Б 1– Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (h)	Y (σ_B), МПа
1	0,1	185
2	0,2	140
3	0,3	116
4	0,4	112
5	0,5	89
6	0,6	76
7	0,7	41
8	0,8	34
9	0,9	22
10	1,0	19

Пример 2

Создать математическую модель зависимости площади растекания расплавленной капли стали S на поверхности образца от температуры нагрева ниобия T .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.2.

Пример 3

Создать математическую модель зависимости распределения остаточных продольных напряжений – $\sigma_{ост}$ при сварке стали и алюминиевых сплавов вдоль сварного соединения – a .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.3.

Таблица Б2 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (T), °C	Y (S), см ²
1	1150	0,31
2	1180	0,34
3	1200	0,39
4	1290	0,39
5	1340	0,4
6	1390	0,41
7	1420	0,43
8	1470	0,44
9	1560	0,48
10	1600	0,59

Таблица Б.3 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (a), мм	Y ($\sigma_{ост}$), МПа
1	10	68
2	20	56
3	30	41
4	40	24
5	50	12
6	60	10
7	70	8
8	80	7
9	90	5
10	100	2

Пример 4

Создать математическую модель зависимости коэффициента наплавки электрода a_n от коэффициента веса покрытия K_B .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.4.

Пример 5

Создать математическую модель зависимости содержания кремния в наплавленном металле при сварке под флюсом Si от основности флюса B .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.5.

Таблица Б.4 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X ($\kappa_{\text{в}}$), %	Y ($a_{\text{н}}$), г/А·ч
1	110	12
2	120	13,2
3	130	14,3
4	140	15,2
5	143	15,4
6	145	15,5
7	150	15,6
8	153	15,62
9	155	15,65
10	160	15,65

Таблица Б.5 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (В)	Y (Si), %
1	0,5	0,48
2	0,75	0,44
3	1,0	0,4
4	1,25	0,36
5	1,35	0,34
6	1,5	0,32
7	1,75	0,31
8	2,0	0,29
9	2,25	0,26
10	2,5	0,25

Пример 6

Создать математическую модель зависимости концентрации кремния в наплавленном металле при сварке под флюсом Si от содержания кремния в плавлено-керамическом флюсе Si_ф.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.6.

Пример 7

Создать математическую модель усвоения фосфора металлом сварного шва P от основности флюса B.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.7.

Таблица Б.6 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (Si _ф), %	Y (Si), %
1	1	0,8
2	2	1,89
3	3	2,53
4	4	3,01
5	5	3,38
6	6	2,87
7	7	4,03
8	8	4,32
9	9	4,55
10	10	5,25

Таблица Б7 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (B)	Y (P), %
1	0,8	0,032
2	1,0	0,027
3	1,1	0,025
4	1,2	0,023
5	1,3	0,022
6	1,4	0,021
7	1,5	0,0205
8	1,6	0,0202
9	1,7	0,02
10	1,8	0,019

Пример 8

Создать математическую модель зависимости вязкости флюса АН 20 η от температуры T.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.8.

Пример 9

Создать математическую модель зависимости силы сварочного тока $I_{св}$ от толщины металла при однопроходной автоматической сварке меди под флюсом h.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.9.

Таблица Б.8 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (T), °C	Y (η), П
1	1000	30
2	1020	26
3	1050	18
4	1100	6
5	1150	5
6	1200	3
7	1250	2
8	1300	1
9	1350	1
10	1400	1

Таблица Б.9 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	Фактор	Отклик
	X (h), мм	Y (I _{св}), А
1	3	350
2	5	500
3	10	700
4	15	1000
5	20	1250
6	25	1400
7	30	1650
8	35	1800
9	40	2200
10	45	2500

Пример 10

Создать математическую модель зависимости предела прочности сварных соединений (медно-никелевый сплав – углеродистая сталь), выполненных диффузионной сваркой, σ_B от температуры сварки T.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице Б.10.

Таблица Б.10 – Условия и результаты эксперимента

№ опыта	фактор	отклик
	X (T), °C	Y (σ _B), МПа
1	520	2
2	550	4
3	570	6
4	600	7
5	620	14
6	650	18
7	700	32
8	720	36
9	750	38
10	800	50

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Варианты заданий к практической работе №2

Пример 1

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния легирующих компонентов порошковой проволоки **Cr**, **Ti**, **Mn** на износостойкость наплавленного металла $A_{кр}$.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.1

Таблица В.1 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Износостойкость y , 100/мг
	Cr,%	Ti,%	Mn,%	
1	1,30	0,50	1,10	18,5
2	1,30	0,50	0,30	6,3
3	0,30	0,50	0,30	12,2
4	0,30	0,50	1,10	5,7
5	1,30	0,10	0,30	12,8
6	1,30	0,10	1,10	9,6
7	0,30	0,10	1,10	7,7
8	0,30	0,10	0,30	5,2
9	0,22	0,30	0,50	4,1
10	0,46	0,22	0,88	13,6

Пример 2

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния легирующих компонентов порошковой проволоки **Cr**, **Ti**, **Mn** на сопротивляемость образованию кристаллизационных трещин $A_{кр}$.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.2.

Пример 3

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния легирующих компонентов порошковой проволоки **Cr**, **Ti**, **Mn** на твердость сварного шва **H**.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.3.

Таблица В.2 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			А _{кр} мм/мин
	Cr,%	Ti,%	Mn,%	
1	1,30	0,50	1,10	7,8
2	1,30	0,50	0,30	15,1
3	0,30	0,50	0,30	20,4
4	0,30	0,50	1,10	17,3
5	1,30	0,10	0,30	5,6
6	1,30	0,10	1,10	15,8
7	0,30	0,10	1,10	12,3
8	0,30	0,10	0,30	21,6
9	0,22	0,30	0,50	8,8
10	0,46	0,22	0,88	9,1

Таблица В.3 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Твердость Н, HRC
	Cr,%	Ti,%	Mn,%	
1	1,30	0,50	1,10	45
2	1,30	0,50	0,30	28
3	0,30	0,50	0,30	40
4	0,30	0,50	1,10	31
5	1,30	0,10	0,30	35
6	1,30	0,10	1,10	32
7	0,30	0,10	1,10	33
8	0,30	0,10	0,30	24
9	0,22	0,30	0,50	20
10	0,46	0,22	0,88	31

Пример 4

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния углерода **C** и легирующих компонентов **Cr, V** в наплавленном металле на твердость сварного шва **H**

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.4.

Пример 5

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния сварочного тока **I**, напряжения на дуге **U** и вылета порошкового электрода **L** на количество теплоты, выделенной электрической дугой в электрод, **Q**

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.5.

Таблица В.4 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Твердость Н, HRC
	C, %	Cr, %	V, %	
1	1,30	0,50	1,10	53
2	1,30	0,50	0,30	42
3	0,30	0,50	0,30	28
4	0,30	0,50	1,10	31
5	1,30	0,10	0,30	47
6	1,30	0,10	1,10	44
7	0,30	0,10	1,10	33
8	0,30	0,10	0,30	39
9	0,22	0,30	0,50	27
10	0,46	0,22	0,88	36

Таблица В.5 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Количество теплоты Q, кДж
	I, А	U, В	L, мм	
1	550	24	12	139
2	650	22	8	122
3	750	26	18	144
4	550	22	8	129
5	650	26	18	132
6	750	22	8	114
7	750	28	18	151
8	550	28	8	112
9	550	26	12	121
10	650	28	12	125

Пример 6

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния раскислителей при электрошлаковой сварке стали 35Л (оксида железа X_1 ; фторида графита X_2) и толщины оболочки порошковой ленты X_3 на содержание углерода в металле сварного шва C .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.6

Таблица В.6 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Содержание углерода C , %
	X_1 , %	X_2 , %	X_3 , мм	
1	71	3,5	0,8	0,32
2	55	2,5	1,0	0,39
3	60	2,9	1,0	0,39
4	61	2,0	1,2	0,4
5	62	2,5	1,1	0,38
6	63	2,8	0,8	0,36
7	65	3,8	0,8	0,32
8	52	2,0	1,2	0,4
9	72	4,0	0,9	0,33
10	55	2,8	1,0	0,39

Пример 7

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния состава медных сплавов (кадмия Cd ; сурьмы Sb ; висмута Bi) на склонность к образованию трещин Tr .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.7.

Пример 8

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния состава флюса для наплавки меди, содержащего борфторид меди B ; оксалат кальция C ; порошок для наплавки ПГ-10К-01 $П$, на удельное электросопротивление наплавленного металла Ω .

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.8.

Таблица В.7 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Склонность к образованию трещин Тр, %
	Cd, %	Sb, %	Bi, %	
1	3,72	2,5	0,002	78
2	3,1	1,0	0,001	52
3	2,2	3,5	0,007	83
4	1,0	2,0	0,005	81
5	2,7	2,5	0,006	84
6	3,0	1,8	0,003	76
7	1,5	3,8	0,002	62
8	1,4	2,0	0,008	87
9	3,3	4,0	0,004	65
10	2,0	2,8	0,001	77

Таблица В.8 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Электросопротивление Ω , Ом·см
	В, %	С, %	П, %	
1	13	2,4	80	$3,8 \cdot 10^{-1}$
2	12	2,2	79	$3,9 \cdot 10^{-1}$
3	11	1,9	77	$4,2 \cdot 10^{-1}$
4	5	0,5	62	$4,7 \cdot 10^{-1}$
5	6	0,6	65	$4,5 \cdot 10^{-1}$
6	7	0,9	69	$3,6 \cdot 10^{-1}$
7	8	1,2	70	$4,2 \cdot 10^{-1}$
8	9	1,5	72	$3,2 \cdot 10^{-1}$
9	10	1,7	71	$3,1 \cdot 10^{-1}$
10	12	1,9	79	$4,0 \cdot 10^{-1}$

Пример 9

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния легирующих компонентов порошковой проволоки (гексафторида лития **L**, магния **M**, алюминия **Al**) на производительность наплавки **G**.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.9.

Таблица В.9 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Производительность наплавки G, кг/ч
	Al, %	M	L, %	
1	88	36	5,8	36
2	91	31	4,4	31
3	86	26	4,1	26
4	90	32	5,2	32
5	89	37	5,9	37
6	92	25	4,3	25
7	84	24	4,2	24
8	81	29	5,0	29
9	82	33	5,1	33
10	90	34	5,3	34

Пример 10

Создать математическую модель 2-го порядка (три фактора, один отклик) влияния легирующих компонентов порошковой проволоки (хрома Cr, ферробората F, алюминия Al) на глубину проплавления металла при наплавке H.

Полученные в результате эксперимента сочетания уровней факторов приведены в таблице В.10.

Таблица В.10 – Условия и результаты эксперимента

№ п/п	Легирующие элементы (обозначение факторов)			Глубина проплавления H, мм
	Cr, %	F, %	Al, %	
1	3,1	6,0	5,2	5,6
2	3,5	6,2	5,4	5,3
3	3,8	6,5	5,5	4,0
4	4,0	8,5	7,1	2,7
5	3,2	6,8	6,6	3,8
6	4,1	8,6	7,2	2,4
7	3,6	7,0	6,5	3,9
8	3,7	6,1	5,3	5,0
9	4,6	8,0	6,9	2,6
10	4,3	8,1	7,1	2,5

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Варианты заданий к практической работе №3

Пример 1

Создать математическую модель влияния газошлаковой образующей порошковой проволоки на коэффициент потерь электродного металла.

Отклик(1) – коэффициент потерь электродного металла ψ , %.

Факторы(3) – шлаковый состав: плавиковый шпат-**Ps** (%), мрамор **М** (%), перовскит **Р** (%).

В таблице Г.1 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.1 – Экспериментальные данные

Опыт	Плавиковый шпат Ps, %	Мрамор М, %	Перовскит Р, %.	ψ , %
1	1	0	0	8,4
2	0	1	0	35,4
3	0	0	1	13,7
4	0,5	0,5	0	15,3
5	0,5	0	0,5	10,4
6	0	0,5	0,5	18,3
7	0,33	0,33	0,34	9,8
8	0,50	0,25	0,25	8,9
9	0,1667	0,666	0,1667	11,8
10	0,666	0,1667	0,1667	7,6

Пример 2

Создать математическую модель влияния компонентов флюса ФЦ 7 на химическую активность **Аф**.

Отклик(1) – химическая активность (суммарное количество кислорода, отнесенное к единице металла) **Аф**.

Факторы(3) – шлаковый состав: **MgO**, **MnO**, **SiO₂** (%).

В таблице Г.2 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.2 – Экспериментальные данные

Опыт	MgO-(Mg, %)	MnO-(Mn, %)	SiO ₂ -(S, %)	Аф
1	1	0	0	0,44
2	0	1	0	0,56
3	0	0	1	0,62
4	0,5	0,5	0	0,58
5	0,5	0	0,5	0,77
6	0	0,5	0,5	0,51
7	0,33	0,33	0,34	0,97
8	0,50	0,25	0,25	0,96
9	0,1667	0,666	0,1667	0,82
10	0,666	0,1667	0,1667	0,84

Пример 3

Создать математическую модель влияния многокомпонентного флюса (CaO-MgO-Al₂O₃-TiO₂-SiO₂-CaF₂) на химическую активность Аф.

Отклик(1) – химическая активность (суммарное количество кислорода, отнесенное к единице металла) Аф.

Факторы(3) – шлаковый состав: MgO, Al₂O₃, SiO₂ (%).

В таблице Г.3 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.3 – Экспериментальные данные

Опыт	MgO-(Mg, %)	Al ₂ O ₃ -(Al, %)	SiO ₂ -(S, %)	Аф
1	1	0	0	0,41
2	0	1	0	0,49
3	0	0	1	0,42
4	0,5	0,5	0	0,73
5	0,5	0	0,5	0,52
6	0	0,5	0,5	0,66
7	0,33	0,33	0,34	0,84
8	0,50	0,25	0,25	0,99
9	0,1667	0,666	0,1667	0,76
10	0,666	0,1667	0,1667	0,81

Пример 4

Создать математическую модель влияния легирующих компонентов порошковой проволоки **Cr, V, Mn** на относительную износостойкость наплавленных образцов.

Отклик(1) – относительная износостойкость наплавленных образцов **И**.

Факторы(3) – легирующие компоненты порошковой проволоки: **Cr, V, Mn (%)**.

В таблице Г.4 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.4 – Экспериментальные данные

Опыт	Cr, %	V, %	Mn, %.	И
1	1	0	0	3,01
2	0	1	0	0,49
3	0	0	1	0,22
4	0,5	0,5	0	3,73
5	0,5	0	0,5	2,01
6	0	0,5	0,5	0,64
7	0,33	0,33	0,34	1,84
8	0,50	0,25	0,25	2,92
9	0,1667	0,666	0,1667	2,17
10	0,666	0,1667	0,1667	3,21

Пример 5

Создать математическую модель влияния содержания компонентов в электроде для наплавки пресс-форм (плавиковый шпат **Ps**, окись алюминия **A**, ниобий **Nb**) на количество теплосмен до образования первой трещины **T**.

Отклик(1) – количество теплосмен до образования первой трещины **T**.

Факторы(3) – компоненты электрода: **Ps, A, Nb (%)**.

В таблице Г.5 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Пример 6

Создать математическую модель влияния содержания компонентов в порошковой проволоке (феррованадий **F**, молибден **Mo**, бура плавленая **Bu**) на потери на угар и разбрызгивание **У**.

Отклик(1) – потери на угар и разбрызгивание **У, %**.

Факторы(3) – компоненты порошковой проволоки: **F, Mo, Вu (%)**.

В таблице Г.6 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.5 – Экспериментальные данные

Опыт	Ps, %	A, %	Nb, %	T
1	1	0	0	1884
2	0	1	0	2101
3	0	0	1	2203
4	0,5	0,5	0	2281
5	0,5	0	0,5	4112
6	0	0,5	0,5	4223
7	0,33	0,33	0,34	6221
8	0,50	0,25	0,25	6875
9	0,1667	0,666	0,1667	6459
10	0,666	0,1667	0,1667	7260

Таблица Г.6 – Экспериментальные данные

Опыт	F, %	Mo, %	Вu, %	У, %
1	1	0	0	8,4
2	0	1	0	8,2
3	0	0	1	6,3
4	0,5	0,5	0	7,7
5	0,5	0	0,5	5,1
6	0	0,5	0,5	5,7
7	0,33	0,33	0,34	5,5
8	0,50	0,25	0,25	3,2
9	0,1667	0,666	0,1667	3,9
10	0,666	0,1667	0,1667	4,1

Пример 7

Создать математическую модель влияния содержания компонентов в порошковой проволоке (алюмокальций **A**, лигатура ФЦМ-5 **L**, фтороборат **F**) на глубину проплавления основного металла при наплавке **G**, мм.

Отклик(1) – глубина проплавления основного металла **G**, мм.

Факторы(3) – компоненты порошковой проволоки: **A, L, F (%)**.

В таблице Г.7 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.7 – Экспериментальные данные

Опыт	А, %	Л, %	Fe, %	G, мм
1	1	0	0	5,6
2	0	1	0	5,2
3	0	0	1	5,0
4	0,5	0,5	0	4,4
5	0,5	0	0,5	4,1
6	0	0,5	0,5	4,2
7	0,33	0,33	0,34	2,9
8	0,50	0,25	0,25	2,4
9	0,1667	0,666	0,1667	3,1
10	0,666	0,1667	0,1667	2,2

Пример 8

Создать математическую модель влияния содержания компонентов флюса (ниобат графита **N**, бура безводная **B**, магнезит **M**) на снижение расхода флюса **R**, г/п.м.

Отклик(1) – снижение расхода флюса **R**, г/п.м.

Факторы(3) – компоненты флюса: **N**, **B**, **M** (%).

В таблице Г.8 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.8 – Экспериментальные данные

Опыт	N, %	B, %	M, %	R, г/п.м
1	1	0	0	166
2	0	1	0	172
3	0	0	1	174
4	0,5	0,5	0	149
5	0,5	0	0,5	170
6	0	0,5	0,5	166
7	0,33	0,33	0,34	132
8	0,50	0,25	0,25	148
9	0,1667	0,666	0,1667	126
10	0,666	0,1667	0,1667	130

Пример 9

Создать математическую модель влияния содержания компонентов порошковой проволоки (борфторид олова **B**, олово **O**, борид магния **M**) на снижение потерь на угар и разбрызгивание **U**, г/п.м.

Отклик(1) – снижение расхода флюса **R**, %.

Факторы(3) – компоненты флюса: **B**, **O**, **M** (%).

В таблице Г.9 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.9 – Экспериментальные данные

Опыт	B, %	O, %	M, %	U, %
1	1	0	0	8,7
2	0	1	0	8,5
3	0	0	1	8,6
4	0,5	0,5	0	8,9
5	0,5	0	0,5	8,4
6	0	0,5	0,5	8,8
7	0,33	0,33	0,34	7,2
8	0,50	0,25	0,25	7,9
9	0,1667	0,666	0,1667	7,7
10	0,666	0,1667	0,1667	7,1

Пример 10

Создать модель влияния компонентов флюса для пайки никелевых сплавов (хлорная медь **M**, гексафторфосфат **G**, борфторид кадмия **K**) на площадь растекания припоя **S**, мм².

Отклик(1) – площадь растекания припоя **S**, мм².

Факторы(3) – компоненты флюса: **M**, **G**, **K** (%).

В таблице Г.10 приведены данные, полученные в результате эксперимента.

Таблица Г.10 – Экспериментальные данные

Опыт	B, %	O, %	M, %	U, %
1	1	0	0	8,7
2	0	1	0	8,5
3	0	0	1	8,6
4	0,5	0,5	0	8,9
5	0,5	0	0,5	8,4
6	0	0,5	0,5	8,8
7	0,33	0,33	0,34	7,2
8	0,50	0,25	0,25	7,9
9	0,1667	0,666	0,1667	7,7
10	0,666	0,1667	0,1667	7,1

Навчальне видання

**ГАВРИШ Павло Анатолійович,
ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів спеціальності
7.092301 «Технологія та устаткування зварювання»
денної і заочної форм навчання
(Російською мовою)

Редактор О. М. Болкова
Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

Вн./2006. Підп. до друку 09.02.07. Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 5,81. Обл.-вид. арк. 5,87.
Тираж 50 прим. Зам. № 34.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.